



UNIVERSITATEA ECOLOGICĂ DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MANAGEMENT FINANCIAR



Program de studii universitare de licență: Finanțe și Bănci

Forma de învățământ: învățământ cu frecvență redusă

Suportul de curs pentru autoinstruire la disciplina

MATEMATICĂ

APLICATĂ ÎN ECONOMIE

CUPRINS

PARTEA I INTRODUCERE - GHID DE STUDIERE A CURSULUI

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 1 Studiul documentelor curriculare și al bibliografiei

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 2 Recapitularea conceptelor și a notiunilor fundamentale

PARTEA a-II-a INTRODUCERE IN ALGEBRA LINIARA

CAPITOLUL 1 SPAȚII VECTORIALE

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 3 Spații vectoriale

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 4 Subspații vectoriale

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 5 Liniaritate. Generatori. Baza. Coordonate. Dimensiune.

CAPITOLUL 2 FUNCȚIONALE PE SPAȚII VECTORIALE

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 6 Funcționare liniare și biliniare

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 7 Forme pătratice. Natura lor. Clasificare.

PARTEA a-III-a ELEMENTE DE ANALIZA MATEMATICA

CAPITOLUL 3 FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABLE REALE

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 8 Teoria diferențială a funcțiilor vectoriale reale

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 9 Optimizarea funcțiilor vectoriale reale

PARTEA a-IV-a ELEMENTE DE MATEMATICI FINANCIARE

CAPITOLUL 4 ELEMENTE DE MATEMATICI FINANCIARE

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 10 Plasamente financiare

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 11 Inflație și devalorizare. Rambursarea împrumuturilor

PARTEA a-V-a APLICAȚII IN DOMENIUL ECONOMICO-FINANCIAR

CAPITOLUL 5 APLICAȚII ECONOMICE

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 12 Funcții de producție

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 13 Aplicații economico-financiare

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 14 Software specializat pentru aplicații economico-financiare

Bine ați venit la acest curs de învățământ universitar

PARTEA I

INTRODUCERE

GHID DE STUDIU AL CURSULUI

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 1

STUDIUL DOCUMENTELOR CURRICULARE ȘI AL BIBLIOGRAFIEI



Cerințe generale

- În materiale de sinteză se pune accent pe principiile fundamentale și aplicarea acestora în realitatea concretă.
- Dimensionarea unităților de învățare (module/teme) pentru studiul individual de aproximativ două-trei ore.
- Forma de prezentare a materialelor este structurată în maniera sugestivă, iar conținutul disciplinei este organizat pe baza principiilor:
 - psiho-pedagogice,
 - ale logicii și interdependenței principalelor concepte, noțiuni științifice
 - gradării dificultăților de: înțelegere, asimilare, aprofundare, dezvoltare, particularizare și generalizarecare să conducă la:
 - însușirea sistematică a cunoștințelor,
 - aprofundarea disciplinei,
 - realizarea deprinderilor și abilităților de raționament: logico-matematic, economico-financiar
 - abandonarea tehnicilor de analiză și calcul.



Cerințe specifice privind suportul de curs

- Proiectate corespunzător obiectivelor din fișa disciplinei
- Prezentarea rezultatelor așteptate și a competențelor dobândite
- Subdivizarea în module, capitole, lecții și unități de studiu
- Indicarea timpului necesar pentru asimilarea fiecărui modul/unitate de învățare
- Utilizarea rezumatelor, concluziilor, exemplelor/contraexemplurilor ilustrative și aplicațiilor specifice
- Teme propuse la fiecare curs
- Instrucțiuni de parcurgere a suportului de curs

Scopul cursului

Obiectivele cursului sunt:

- Explicarea noțiunilor specifice algebrei liniare și analizei matematice
- Introducerea în domeniile matematicilor economice
- Exemplificarea metodelor și tehnicilor de calcul și analiză
- Enunțarea principalelor rezultate
- Prezentarea unor exemple și contraexempluri clasice
- Analiza economică și evaluarea scenariilor
- Crearea abilităților de raționament deductiv
- Realizarea deprinderilor de calcul

De menționat că, deși unii termeni științifici vă sunt complet necunoscuți și, eventual, au denumiri deosebite, pe parcursul expunerii sunt explicați și exemplificați în situații economice și contexte concrete, ceea ce vă permite utilizarea lor în cadrul altor discipline din planul de învățământ și în activitatea profesională ulterioară.

Nivelul cursului este astfel gândit pentru a fi utilizat de persoane ca dvs. ce vor lucra în acest domeniu sau care vor fi potențiali apropiați de acesta.

În același timp poate fi util oricărei persoane ce dorește o înțelegere a fenomenelor economice-financiare.

Structura cursului

Estimativ, durata medie de studiere a cursului va fi de 28 de ore

În mod normal, se consideră că un asemenea curs se poate studia minimum 3 ore pe săptămână, Aplicațiile și temele propuse se pot realiza, estimativ tot în minimum 3 ore pe săptămână, în timp ce pentru examen, este necesară încă minimum o săptămână de studiu.

Suportul de curs este structurat în 14 unități de învățare.

Structura logică în care este recomandată parcurgerea cursului

Unitatea de învățare se poate parcurge atât în întregime, respectând ordinea lecțiilor, dar și parțial, prin studierea numai a acelei părți pe care o considerați utilă.

Totuși pentru evaluarea finală a studenților este necesară parcurgerea tuturor lecțiilor și efectuarea exercițiilor practice.

Studiul cursului

Este de dorit să studiați lecțiile pe calculator sau din manual.

Totodată este recomandată realizarea exemplurilor solicitate și efectuarea exercițiilor practice.

Dacă într-o anumită lecție se regăsesc referințe către alte resurse și materiale tipărite sau în format electronic, pe Internet, vă indicăm să le parcurgeți.

Fiecare lecție începe prin prezentarea cunoștințelor, competențelor și abilităților pe care le căpătați după studierea respectivului material.

Vă recomandăm să le citiți la început pentru ca vă ofera o imagine despre ceea ce învățați și încă o dată la sfârșitul lecției pentru a vă asigura că atingerea acestor obiective.

La sfârșitul fiecărui capitol beneficiați de exerciții recomandate și teme propuse care vă vor ajuta să stabiliți singuri ritmul de învățare și necesitățile proprii de repetare a unor teme.

Pentru a testa cunoștințele asimilate UNITATEA DE ÎNVĂȚARE pune la dispoziția utilizatorului o serie de întrebări, teste și exerciții practice.

Acestea sunt menite să autoevalueze asimilarea cunoștințelor prezentate.

Este util a testa cunoștințele doar după ce parcurgerea lecției și după epuizarea tuturor posibilităților de a răspunde individual la acea solicitare sau atunci când este necesară autoverificarea soluției găsite.

Mentionăm că aceste cerințe sunt pentru uzul personal, atâta vreme cât răspunsurile și soluțiile determinate sunt individuale.

Am urmărit ca materialele de curs să fie prezentate sub o formă accesibilă de un absolvent de liceu și bacalaureat, fără a pierde din vedere caracterul științific și practic al disciplinei.

Totuși, este inevitabil că, în funcție de pregătirea eterogenă și de capacitățile intelectuale ale fiecăruia, aprecierea gradului de dificultate a unor părți din acest curs să fie mult diferită.

În cazul în care este necesar un ajutor suplimentar acesta poate fi solicitat cadrelor didactice și tutorilor de an (de la curs și de la activitățile de seminar).

În măsura posibilităților, noi, autorii răspundem solicitărilor.

Pe durata cursului se pot transmite întrebări titularului cursului conf.univ.dr. mat. Janina Mihaela Mihăilă - Universitatea Ecologică din București, București, Sector 5, bd.Vasile Milea nr.1G prin e-mail la adresa: janinamihaelamihaila@yahoo.it.

Răspunsurile se primesc în aproximativ trei zile pe e-mail.

Exercitiile abordate, temele rezolvate si studiul de caz formulat la seminar se realizeaza individual si se prezintă de fiecare student.

Rezultatele acestei evaluări se comunică de către cadrul didactic în mod direct și nemijlocit studenților.

Evaluarea finală

Evaluarea finala consta din aprecierea realizata in timpul semestrului si rezultatele obtinute la examenul final

Pe timpul semestrului va fi propus un studiu de caz care se va elabora si prezenta individual in ultimele 3 ore ale seminarului.

Studiul de caz vizeaza o societate comerciala sau firma, pentru care, folosind date fictive, sa se genereze scenarii si situatii concrete, la care sa se aplice modalitatile si tehnicile si calculul si analiza sau, minimal, un set de cel putin trei exercitii rezolvate din cele propuse in curs.

Examenul final

Fiind o disciplina cu un deosebit potențial aplicativ puteți căpăta abilitățile necesare promovării cu succes a examenului final printr-un studiu individual susținut și constant.

Parcurgând lecțiile pe durata recomandată se pot obține rezultate foarte bune și de durată.

Examenul final constă dintr-un examen cu cinci exercitii, cate unul din fiecare capitol, in genul celor continute in curs, fie din cele rezolvate la seminar, fie din cele recomandate spre rezolvare, cu cerinte gradate pe nivele de dificultate si creativitate.

Înainte de examen este recomandata cel putin o săptămână pentru revederea si recapitularea materialelor studiate și a exercițiilor practice realizate pe parcursul activitatilor didactice si prin studiu individual.

Totodată este utila reparcurgerea notitelor si însemnărilor luate la seminarii.

Nu în ultimul rând se pot purta discutii de studiu cu alți colegi din grupă sau alte cunoștințe care studiază sau au studiat această disciplină.

Spor la studiu pentru ca succesul va fi ulterior!

Oportunități

Prin parcurgerea acestui curs se poate obtine formarea profesionala si inițierea în profesii de specialitate.

De exemplu, temele prezentului curs se constituie adesea în probe de examen pentru ocuparea unor functii din domeniul economico-financiar, managementul firmei, experti economici si financiari etc.

Importanta disciplinei rezidă în marea gama de aplicabilitate a metodelor si tehnicilor expuse în varii domenii de activitate printre care se înscrie si specializarea si domeniul de licenta: finante-banci si administrarea afacerilor.

Mai este oare necesar a imagina un specialist în aceste domenii prioritare ale economiei fara cunostinte si abilitati de calcul si analiza?

Instrumente si unelte necesare studiului

Cursantii au la dispozitie si alte instrumente si unelte necesare studiului unde se gasesc si alte aplicații foarte utile în aprofundarea cunoștințelor acumulate:

- bibliografia recomandata
- lucrări complementare
- suport electronic complet si unitatea de învățare integral pe suport tiparit
- anexa cu alfabetul grec folosit adesea în domeniul matematic
- anexa cu glosar de termeni explicati.

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 2

RECAPITULAREA CONCEPTELOR SI A NOTIUNILOR FUNDAMENTALE



Obiectivele lecției

- Prezentarea alfabetului grec folosit în expunerea și prezentarea notiunilor
- Explicarea termenilor și a simbolurilor specifice disciplinei



Conținutul lecției

1. Anexa 1 Alfabetul grec
2. Anexa 2 Abrevieri și termeni
3. Tabel de derivate

Anexa 1 Alfabetul grec

Alfabetul grec este o culegere a celor 24 de litere, care este folosit pentru a scrie în limba greacă de la secolul VIII î.Hr. până astăzi.

Este și primul și cel mai vechi alfabet în sensul că denotă fiecare vocală și fiecare consoană cu semnul separat.

De la secolul II î.Hr. literele grecești se folosesc și pentru a marca numerele.

Alfabetul grec își are originile în alfabetul fenician și la baza formării mai multor alfabetice folosite în Europa și Orientul Mijlociu, inclusiv latin și chirilic.

În afară de funcția sa de reprezentare scrisă a limbii grecești, literele alfabetului grec sunt folosite azi ca simboluri în matematică și alte științe exacte.

Alfabetul grec

Literă mare	Literă mică	Transcriere clasică	Denumire
A	α	A	Alpha
B	β	B	Bêta
Γ	γ	g	Gamma
Δ	δ	d	Delta
E	ε	e	Epsilon
Z	ζ	z	Dzêta
H	η	ê	Êta
Θ	θ	th	Thêta
I	ι	i	Iota
K	κ	k	Kappa
Λ	λ	l	Lambda
M	μ	m	Mi
N	ν	n	Ni
Ξ	ξ	x/ks	Xi
O	$\omicron$	o	Omicron
Π	π	p	Pi
P	ρ	r	Rhô
Σ	σ, ς	s	Sigma
T	τ	t	Tau
Y	υ	y	Ypsilon
Φ	ϕ	ph	Phi
X	χ	kh	Khi
Ψ	ψ	ps	Psi
Ω	ω	ô	Oméga

Literele grecești sunt folosite deseori în notația științifică, mai ales în algebra și fizică:

- Unghiurile sunt notate cu θ (*theta* mic) sau α (*alpha* mic).
- Litera Δ (*delta* mare) este folosit pentru a desemna un interval, dar și pentru a calcula o ecuație de gradul al II-lea
- Litera ε (*epsilon* mic) este folosită pentru a desemna valorile neglijabile (cantități mici).
- Litera π (*pi* mic) este utilizată în matematică pentru a desemna circumferința unui cerc cu raza egală cu o unitate (aproximativ 3,1415926536).
- Litera Π (*pi* mare) este utilizată în matematică pentru a desemna un produs de elemente.
- Litera ω (*omega* mic) desemnează în fizică viteza unghiulară.
- Litera Ω (*omega* mare) este simbolul pentru o unitate în SI a rezistenței electrice, ohmul.
- Litera μ (*mu* mic) este simbolul pentru prefixul SI *micro* care reprezintă o milionime dintr-o unitate.
- Litera ρ (*rho* mic) este folosită în matematică pentru a indica curbele polare, și în fizică pentru densitate.
- Litera χ (*chi* mic) este utilizată în fizică pentru a desemna un coeficient de compresibilitate (termodinamică și unde)
- Litera Σ (*sigma* mare) este utilizată în matematică pentru a desemna o sumă de elemente.
- Literele grecești sunt folosite pentru a desemna stelele.
- Diferitele tipuri de radiație emisă de materialele radioactive sunt notate respectiv α , β și γ .

Anexa 2 Abrevieri și termeni

Lema - gr. lemma "propoziție luată ca argument", propoziție ajutătoare folosită la demonstrarea unei teoreme; lemele au fost folosite inițial de Euclid (sec.3 î.e.n.).

Teorema - gr. theorem "examinare, cercetare", denumirea a fost folosită inițial de Aristotel.

În calculul vectorial, nabla este un operator diferențial ce operează asupra funcțiilor, reprezentat prin simbolul¹ ∇ .

În funcție de cum este aplicat operatorul, el poate descrie gradientul (panta), divergența sau rotorul.

Matematic, nabla poate fi privit ca o derivată în spațiul multidimensional.

Când este folosit într-o singură dimensiune, el ia forma derivatei din analiza matematică.

Ca operator, el operează pe câmpuri vectoriale și câmpuri scalare care suportă operații similare înmulțirii.

Ca toți operatorii, acești operatori similari înmulțirii nu trebuie să fie confundați cu înmulțirea; în particular, nabla nu comută.

În coordonate carteziane tridimensionale, $\mathbb{R}^3$ cu coordonatele (x, y, z) , nabla se definește ca

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

unde $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ este baza standard în $\mathbb{R}^3$.

Această definiție poate fi generalizată într-un spațiu euclidian, de dimensiune n $\mathbb{R}^n$.

În sistemul de coordonate carteziane cu coordonatele $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, nabla este:

$$\nabla = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

unde $\{\vec{e}_i : 1 \leq i \leq n\}$ este baza standard în acest spațiu.

Mai pe scurt, folosind notația Einstein, nabla se scrie ca $\nabla = \vec{e}_i \partial_i$

Nabla poate fi exprimat și în alte sisteme de coordonate, de exemplu în coordonate cilindrice sau sferice.

¹ Nabla este un simbol matematic folosit în primul rând ca o convenție de notație.

Nabla este folosit drept formă prescurtată de scriere pentru simplificarea multor expresii matematice lungi.

Cel mai adesea, este folosit pentru a simplifica expresiile pentru gradient, divergență, rotor, derivată direcțională și Laplacian.

3. Tabel de derivate

Determinarea derivatei este operația primară în calculul diferențial.

Acest tabel conține derivatele celor mai importante funcții, precum și reguli de derivare pentru funcții compuse.

În cele ce urmează, f și g sunt funcții de variabila x , iar c este o constantă.

Funcțiile sunt presupuse reale de variabilă reală.

Aceste formule sunt suficiente pentru a deriva orice funcție elementară.

Reguli generale de derivare

$$\begin{aligned}(cf)' &= cf' & (f+g)' &= f' + g' & (f-g)' &= f' - g' \\ (fg)' &= f'g + fg' & \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} & (f \circ g)' &= (f' \circ g)g' \\ (f^g)' &= (gf^{g-1})f' + (f^g \ln f)g' = f^g \left(f' \frac{g}{f} + g' \ln f\right), & f > 0\end{aligned}$$

Derivatele funcțiilor simple

$$c' = 0 \qquad x' = 1 \qquad (x^c)' = cx^{c-1}, \quad x > 0$$

$$(|x|)' = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn} x, \quad x \neq 0$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Derivatele funcțiilor exponențiale și logaritmice

$$(n^x)' = n^x \ln n, \quad n > 0 \quad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_n x)' = \frac{1}{x \ln n}, \quad n > 0, n \neq 1 \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Derivatele funcțiilor trigonometrice

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x & (\sec x)' &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x \\ (\operatorname{ctg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x = -1 - \operatorname{ctg}^2 x & (\csc x)' &= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \csc x \end{aligned}$$

Derivatele funcțiilor trigonometrice inverse

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2} \quad (\operatorname{arccsc} x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Derivatele funcțiilor hiperbolice

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tgh} x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = -\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{ctgh} x = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{csch} x = -\operatorname{ctgh} x \operatorname{csch} x$$

Derivatele funcțiilor hiperbolice inverse

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccosh} x = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctgh} x = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsech} x = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcctgh} x = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsch} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{1 + x^2}}$$

Bibliografie

Manualele de liceu clasa a XI-a și a XII-a.

PARTEA a-II-a

INTRODUCERE ÎN ALGEBRA LINIARĂ

CAPITOLUL I SPAȚII VECTORIALE

CAPITOLUL 2 FUNCȚIONALE PE SPAȚII VECTORIALE

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 3

SPAȚII VECTORIALE



Obiectivele lecției

- Explicarea definițiilor și regulilor de calcul
- Enunțarea principalelor rezultate legate de spații vectoriale
- Prezentarea unor exemple și contraexempluri clasice
- Recunoașterea structurii de spațiu vectorial
- Crearea abilităților de raționament deductiv



Conținutul lecției

1. Introducere
2. Definiție, terminologie și notații
3. Proprietăți (reguli de calcul)
4. Exemple
5. Exerciții rezolvate
6. Teme propuse
7. Bibliografie

Introducere

Forma actuală a definiției spațiului vectorial se datorează întemeietorului aritmeticii axiomatică, G. Peano² (1888), deși K. Gauss³ (1799) folosea implicit noțiunea de plan vectorial. Fondatorul teoriei spațiilor vectoriale rămâne însă H. Grassmann⁴ (1844).

Definiție și terminologie

Definiția 1

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp nevid (de exemplu, corpul numerelor reale sau complexe, cu 0_K și 1_K

² Peano Giuseppe (1858-1932), matematician, logician și lingvist italian

³ Gauss Karl Friedrich (1777-1855), matematician și astronom german, a conceput metoda celor mai mici pătrate, a demonstrat teorema fundamentală a algebrei, a întemeiat calculul cu numerele complexe, etc.

⁴ Grassmann Hermann Gunther (1809-1877), matematician și filolog german, a exprimat și dezvoltat noțiunea de spațiu cu n dimensiuni, etc.

elementul zero și respectiv elementul unitate) și V o mulțime nevidă, înzestrată cu o lege de compoziție internă $\oplus: V \times V \rightarrow V$ și o lege de compoziție externă $\otimes: K \times V \rightarrow V$ astfel încât:

Tripletul $(V, \oplus, \otimes)$ se numește spațiu vectorial peste corpul K dacă:

- V este grup abelian în raport cu legea de compoziție internă $\oplus$ (cu elementul neutru 0 și $-x$ elementul opus lui $x \in V$);

- legea de compoziție externă satisface cerințele:

1. $(\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x), \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V;$
2. $\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y), \forall \alpha \in K, \forall x, y \in V;$
3. $(\alpha \cdot \beta) \otimes x = \alpha \otimes (\beta \otimes x), \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V;$
4. $1 \otimes x = x, \forall x \in V, x \neq 0.$
- 5.

Notăm V/K , adică V este spațiu vectorial peste corpul K .

Terminologie și notații

1. Elementele spațiului vectorial V se numesc vectori și se notează cu litere latine mici.
2. Elementele lui K se numesc scalari și se notează cu litere grecești mici.
3. Un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$ se numește spațiu vectorial real.
4. Un spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$ se numește spațiu vectorial complex.

Proprietăți

Propoziție

Intr-un spațiu vectorial, au loc următoarele reguli de calcul:

- a) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y, \forall \alpha \in K, \forall x, y \in V;$
- b) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x, \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V;$
- c) $0x = 0, \forall x \in V;$
- d) $\alpha 0 = 0, \forall \alpha \in K;$
- e) $1x = x, \forall x \in V;$
- f) $(-1)x = -x, \forall x \in V;$
- g) $\alpha x = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ sau } x = 0, \forall \alpha \in K, \forall x \in V.$

Demonstrație:

- a) fie $\alpha \in K$ și $x, y \in V$. Atunci $\alpha x = \alpha(x - y + y) = \alpha(x - y) + \alpha y$ și adunând $-\alpha y$ (care există deoarece $\alpha x \in V$ iar $(V, +)$ este grup) în ambii membri rezultă $\alpha x - \alpha y = \alpha(x - y)$.
- b) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V, \alpha x = \alpha x - \beta x + \beta x$ rezulta $\alpha x - \beta x = \alpha x - \beta x$ de unde, folosind proprietatea a) în membrul stâng, se obține $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$.

c) $0x = (\alpha - \alpha)x = \alpha x - \alpha x = 0, \forall x \in V$

d) avem $\alpha 0 = \alpha(x - x) = \alpha x - \alpha x = 0, \forall \alpha \in K$

e) din proprietatea 4 din definiție rezultă că $1x = 0$ implică $x = 0$.

Fie deci $1(x - 1x) = 1x - (1 \cdot 1)x = 1x - 1x = 0$ deci $x - 1x = 0$ adică $1x = x, \forall x \in V$

g) fie $\forall \alpha \in K$ și $x \in V$ astfel încât $\alpha x = 0$.

Dacă $\alpha = 0$ demonstrația este încheiată.

Fie deci $\alpha \neq 0$. $\exists \alpha^{-1} \in K \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1} \cdot 0 = 0$ iar pe de altă parte $\alpha^{-1}(\alpha x) = (\alpha^{-1} \cdot \alpha)x = 1 \cdot x = x$ deci $x = 0$.

Exemple.

1. Spațiul vectorial numeric real $\mathfrak{R}^n / \mathfrak{R}$ definit prin

$$\mathfrak{R}^n = \underbrace{\mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \dots \times \mathfrak{R}}_{n \text{ ori}} = \left\{ (x_1, \dots, x_n)^t / x_i \in \mathfrak{R}, i = \overline{1, n} \right\},$$

și inzestrat cu operațiile canonice:

- legea de compoziție internă este adunarea vectorilor
- legea de compoziție externă este înmulțirea vectorilor cu scalar real.

Explicit, definim cele două operații:

a) dacă $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ și $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ atunci adunarea vectorilor $x + y$ se definește pe componente:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n$$

b) înmulțirea vectorului cu un scalar se definește prin multiplicarea tuturor componentelor vectorului cu respectivul scalar:

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in \mathbf{R}^n$$

Observatie

Egalitatea a doi vectori este definită astfel:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sunt egali dacă și numai dacă $x_i = y_i, \forall i = \overline{1, n}$.

2. Mai general, K^n / K inzestrat cu operațiile canonice este spațiu vectorial

$$K^n = \underbrace{K \times K \times \dots \times K}_{n \text{ ori}} = \left\{ (x_1, \dots, x_n)^t / x_i \in K, i = \overline{1, n} \right\}$$

unde K este corpul numerelor reale sau complexe.

3. Spațiul vectorial al matricelor $M_{m,n}(K)/K$ cu m linii și n coloane cu elemente din corpul K , unde $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$, înzestrat cu operațiile canonice:
- legea de compoziție internă este adunarea matricelor,
 - legea de compoziție externă este înmulțirea matricelor cu scalar.
4. Spațiul polinoamelor într-o nedeterminată, cu coeficienți reali de grad cel mult n .



Exerciții rezolvate

1. Spațiul $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n)^t, x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\}$ este spațiu vectorial real față de adunarea vectorilor și înmulțirea cu scalari.

Soluție:

$$V = \mathbb{R}^n, K = \mathbb{R}$$

$$\oplus: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, y) \rightarrow x \oplus y$$

$$\text{Fie } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ cu } x_i, y_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, n}$$

$$x \oplus y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\otimes: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(\alpha, x) \rightarrow \alpha \otimes x$$

$$\text{Pentru } \alpha \in \mathbb{R} \text{ și } x \in \mathbb{R}^n \text{ definim } \alpha \otimes x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Verificăm axiomele din definiția spațiului vectorial.

i) $(\mathbb{R}^n, \oplus)$ grup abelian

$$a) \forall x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x \oplus y \in \mathbb{R}^n$$

Vectorul $x \oplus y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^n$ pentru că are n componente reale (adunând două numere reale

obținem un număr real)

$$b) \quad x \oplus y = y \oplus x, \quad \forall x, y \in \mathfrak{R}^n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$x_i + y_i = y_i + x_i, \quad \forall i = \overline{1, n}$ (adunarea numerelor reale este comutativă)

$$c) \quad (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z), \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{R}^n$$

$$(x \oplus y) \oplus z = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1) + z_1 \\ \vdots \\ (x_n + y_n) + z_n \end{pmatrix}$$

$$x \oplus (y \oplus z) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (y_1 + z_1) \\ \vdots \\ x_n + (y_n + z_n) \end{pmatrix}$$

Cei doi vectori sunt egali pentru că au componentele respectiv egale (adunarea numerelor reale este asociativă).

$$d) \quad \exists e \in \mathfrak{R}^n \text{ astfel încât } \forall x \in \mathfrak{R}^n \Rightarrow e \oplus x = x \oplus e = x$$

$$\text{Din } e \oplus x = x \Rightarrow \begin{pmatrix} e_1 + x_1 \\ \vdots \\ e_n + x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow e_i + x_i = x_i, \quad \forall i = \overline{1, n} \Leftrightarrow e_i = 0, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

$$\text{Deci } e = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^n$$

$$e) \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n \quad \exists x' \in \mathfrak{R}^n \text{ astfel încât } x \oplus x' = x' \oplus x = e$$

$$\text{Din } x \oplus x' = e \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_i + x'_i = 0 \quad \forall i = \overline{1, n} \Leftrightarrow x_i = -x'_i, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

$$\text{Deci } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^n$$

ii) $\otimes$ satisface următoarele cerințe:

$$\text{a) } (\alpha + \beta) \otimes \mathbf{x} = (\alpha \otimes \mathbf{x}) \oplus (\beta \otimes \mathbf{x}), \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R} \text{ si } \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$$

$$\text{Vectorul } (\alpha + \beta) \otimes \mathbf{x} = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)x_1 \\ \vdots \\ (\alpha + \beta)x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Vectorul } (\alpha \otimes \mathbf{x}) \oplus (\beta \otimes \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \vdots \\ \beta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta x_n \end{pmatrix}$$

Cei doi vectori sunt egali deoarece $(\alpha + \beta)x_i = \alpha x_i + \beta x_i, \forall i = \overline{1, n}$ (înmulțirea numerelor reale este distributivă față de adunare la stânga și la dreapta).

$$\text{b) } \alpha \otimes (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = (\alpha \otimes \mathbf{x}) \oplus (\alpha \otimes \mathbf{y}) \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R} \text{ si } \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n$$

$$\alpha \otimes (\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}) = \alpha \otimes \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1 + y_1) \\ \vdots \\ \alpha(x_n + y_n) \end{pmatrix}$$

$$(\alpha \otimes \mathbf{x}) \oplus (\alpha \otimes \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \vdots \\ \alpha y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \alpha y_n \end{pmatrix}$$

Dar $\alpha(x_i + y_i) = \alpha x_i + \alpha y_i, \forall i = \overline{1, n}$

$$\text{c) } (\alpha\beta) \otimes \mathbf{x} = \alpha \otimes (\beta \otimes \mathbf{x}), \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R} \text{ si } \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$$

$$(\alpha\beta) \otimes \mathbf{x} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)x_1 \\ \vdots \\ (\alpha\beta)x_n \end{pmatrix} \quad \alpha \otimes (\beta \otimes \mathbf{x}) = \alpha \otimes \begin{pmatrix} \beta x_1 \\ \vdots \\ \beta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta x_1) \\ \vdots \\ \alpha(\beta x_n) \end{pmatrix}$$

Dar $(\alpha\beta)x_i = \alpha(\beta x_i), \forall i = \overline{1, n}$ (înmulțirea numerelor reale este asociativă)

$$d) \quad 1 \otimes x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n; \quad 1 \otimes x = \begin{pmatrix} 1x_1 \\ \vdots \\ 1x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$$

Cum $1x_i = x_i, \forall i = \overline{1, n}$ (elementul neutru la înmulțirea numerelor reale este 1).

2. Să se arate că $\mathbb{R}$ este un spațiu vectorial peste $\mathbb{Q}$, dar $\mathbb{Q}$ nu este un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$, operațiile fiind cele naturale.

Soluție: Prima afirmație este evidentă pentru că $(\mathbb{R}, +)$ este grup abelian; pentru setul (ii): (1) și (2) sunt consecințe ale distributivității înmulțirii față de adunare, (3) este o consecință a asociativității înmulțirii numerelor reale iar (4) este echivalentă cu faptul că 1 este elementul neutru pentru înmulțire.

$\mathbb{Q}$ nu este spațiu vectorial real întrucât înmulțirea nu este lege externă.

Într-adevăr, trebuie să avem:

$$(\forall) \alpha \in \mathbb{Q}, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha x \in \mathbb{Q}, \text{ dar pentru } \alpha = 1 \text{ și } x = \sqrt{2}, \alpha x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$



Bibliografie

G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Suport de curs pentru ID-IFR, Editura Mustang, București, 2012
G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Matematici Economice, Editura Universitară, București, 2010
J. M. Mihăilă, Sinteza Matematica aplicata in economie, format digital, biblioteca electronica
S. Dedu, F. Serban, Matematici Aplicate in Economie, Editura A, 2017
C. E. N. Gal-Chiș, Matematici economice, Editura Emanuel, 2015
T. Stihi, R. Vidican, Algebra liniara, Geometrie analitica si diferentia, Ecuatii diferentiale. Teoria campurilor, Editura Fair Partners, Bucuresti 2006

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 4

SUBSPATII VECTORIALE



Obiectivele lecției

- Explicarea definițiilor și a regulilor de calcul
- Enunțarea principalelor rezultate legate de subspațiile vectoriale
- Prezentarea unor exemple și contraexempluri clasice
- Recunoașterea structurii de subspațiu vectorial
- Crearea abilităților de raționament deductiv



Conținutul lecției

1. Subspații vectoriale
2. Definiție, terminologie și notații
3. Proprietăți (rezultate)
4. Exerciții rezolvate
5. Teme propuse
6. Bibliografie

Subspații vectoriale

Definiția 2.

O submulțime nevidă a unui spațiu vectorial se numește subspațiu vectorial al sau dacă este chiar spațiu vectorial în raport cu legile de compoziție internă și externă induse de legile corespunzătoare.

Matematic:

Fie spațiul vectorial V/K , o submulțime, $W \neq \emptyset$ se numește subspațiu vectorial al spațiului V , dacă W este spațiu vectorial înzestrat cu operațiile induse.

Definiția 3.

O submulțime nevidă W a spațiului vectorial V , se numește subspațiu vectorial al lui V dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

1. $\forall x, y \in W \Rightarrow x + y \in W$
2. $\forall x \in W, \forall \alpha \in K \Rightarrow \alpha x \in W$.

Observație

Cele două condiții sunt echivalente cu: $\forall x, y \in W, \forall \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W$.



Terminologie si notatii

- a) Spatiul vectorial se numeste spatiu ambient pentru subspatiul vectorial pe care-l contine.
- b) Legile de compoziție (internă și externă) induse de legile corespunzătoare pe subspatiul vectorial se numesc operatii induse.
- c) Corpul scalarilor se subintelege a fi identic.
- d) W este subspatiu vectorial al spatiului vectorial V se notează $W < V$.

Proprietati

Teorema 1. (Echivalenta definitiilor)

Fie $V/K, W \subseteq V, W \neq \emptyset$. Atunci $W < V \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in K \forall x, y \in W, \alpha x + \beta y \in W$.

Demonstrație.

$\Rightarrow$ Fie $x, y \in W$ și $\alpha, \beta \in K$. Cum $W < V \Rightarrow \alpha x, \beta y \in W \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W$.

$\Leftarrow$ Dacă $W \subseteq V$ și are proprietatea că $\forall \alpha, \beta \in K \forall x, y \in W, \alpha x + \beta y \in W$ atunci pentru $\alpha = \beta = 1$, $\forall x, y \in W \Rightarrow x + y \in W$, iar pentru $\beta = 0$ obținem $\forall \alpha \in K \forall x \in W, \alpha x \in W$.

Propoziție.

Intersecția de subspații vectoriale este un subspațiu vectorial.

Demonstrație

Fara a restrange generalitatea, vom demonstra enuntul pentru două subspații.

Fie $V/K, U, W < V$.

Pentru a arăta că $U \cap W < V$ folosim implicația inversă a teoremei de mai sus

$$\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in K \forall x, y \in U \cap W, \alpha x + \beta y \in U \cap W \Leftrightarrow \alpha x + \beta y \in U \text{ și } \alpha x + \beta y \in W.$$

Dar $x, y \in U \cap W \Leftrightarrow x, y \in U$ și $x, y \in W$.

Din $\alpha, \beta \in K$ și $x, y \in U$ iar $U < V \Rightarrow \alpha x + \beta y \in U$.

Din $\alpha, \beta \in K$ și $x, y \in W$ iar $W < V \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W$.

Deci $\alpha x + \beta y \in U \cap W$.



Exercitii propuse

1. Sa se verifice daca urmatoarea submultime

$$X = \{x = (x_1, x_2, x_3)^t / x_1 = 0\} \subset \mathbf{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in \mathbf{R}, \forall i = \overline{1, 3}\}$$

inzestrata cu operatiile induse are structura de subspatiu vectorial real a spatiului tridimensional real.

2. Sa se verifice daca urmatoarea submultime

$$X = \{x = (x_1, x_2, x_3)^t / x_1 - x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbf{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in \mathbf{R}, \forall i = \overline{1, 3}\}$$

inzestrata cu operatiile induse are structura de subspatiu vectorial real a spatiului tridimensional real.

3. Arătați că mulțimea matricelor de ordin $m \times n$ formează în raport cu adunarea matricelor și înmulțirea lor cu scalar un spațiu vectorial ($K = \mathbb{R}$).

4. Pe exemplul unui agent economic organizați spațiul intrărilor în sistem ca spațiu vectorial.

5. Sa se verifice daca urmatoarele multimi formeaza spatiu vectorial real in raport cu operatiile canonice:

a) multimea polinoamelor intr-o nedeterminata, cu coeficienti reali de grad cel mult 3

b) multimea polinoamelor intr-o nedeterminata, cu coeficienti reali de grad exact 3.

6. Fie R^3 / R și $V \subset R^3$, unde:

$$\text{a) } W = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 x_2 = 1 \right\} \quad \text{b) } W = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 = x_2 = 0 \right\}$$

$$\text{c) } V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 + x_2 = 0 \right\} \quad \text{d) } V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / x_1 + x_2 = 1 \right\}.$$

În care din aceste cazuri este V un spațiu vectorial?

7. Considerăm spațiul vectorial complex al polinoamelor $P / \mathbb{C}$ și $V \subset P$, unde V este mulțimea acelor polinoame x pentru care:

a) X are gradul 3;

b) $2X(0) = X(1)$;

c) $X(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]$, de asemenea $X(t) = X(1-t), \forall t$.

În aceste condiții este V un spațiu vectorial?

8. Precizați care din următoarele submulțimi ale lui $\mathfrak{R}^n$ au structura de subspațiu vectorial în raport cu operațiile induse:

$$X_1 = \{x \in \mathfrak{R}^n / x = (x_1, \dots, x_n)^t \text{ și } x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

$$X_2 = \{x \in \mathfrak{R}^n / x = (x_1, \dots, x_n)^t \text{ și } x_1 = 1\}$$

$$X_3 = \{x \in \mathfrak{R}^n / x = (x_1, \dots, x_n)^t \text{ și } x_1 x_2 = 1\}$$

$$X_4 = \{x \in \mathfrak{R}^n / x = (x_1, \dots, x_n)^t \text{ și } x_1 + x_2 = 1\}$$

$$X_5 = \{x \in \mathfrak{R}^n / x = (x_1, \dots, x_n)^t \text{ și } x_1 = x_2 = x_3\}$$

9. Fie $X = \{x \in \mathfrak{R}^3 / x = (x_1, x_2, x_3)^t \text{ și } x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = b\}$, $\alpha, \beta, b \in \mathfrak{R}$.

a) Determinați valoarea lui $b \in \mathfrak{R}$ astfel încât $X < \mathfrak{R}^3 / \mathfrak{R}$ pentru orice $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$.

b) Pentru $\alpha = 1$ și b determinat mai sus, găsiți $\beta \in \mathfrak{R}$ astfel ca $v = (2, 1, -4)^t \in X$.

8. Fie spațiul vectorial $\mathfrak{R}_3[x] / \mathfrak{R}$ și $V \subset \mathfrak{R}_3[x]$ unde

$$V = \{P \in \mathfrak{R}_3[x] / P(-x) = P(x)\}. \text{ Arătați că } V < \mathfrak{R}_3[x].$$

10. Să se arate că mulțimea Q a matricelor pătrate de ordinul doi de tipul $\begin{pmatrix} a & b \\ a & a \end{pmatrix}$ este un subspațiu vectorial al lui $M_2(\mathfrak{R})$.



Bibliografie

G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Suport de curs pentru ID-IFR, Editura Mustang, București, 2012
G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Matematici Economice, Editura Universitară, București, 2010
J. M. Mihăilă, Sinteza Matematica aplicata in economie, format digital, biblioteca electronica
S. Dedu, F. Serban, Matematici Aplicate in Economie, Editura A, 2017
C. E. N. Gal-Chiș, Matematici economice, Editura Emanuel, 2015
T. Stihi, R. Vidican, Algebra liniara, Geometrie analitica si diferentiale, Ecuatii diferentiale. Teoria campurilor, Editura Fair Partners, Bucuresti 2006

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 5

LINIARITATE. GENERATORI. BAZA. COORDONATE. DIMENSIUNE



Obiectivele lecției

- Explicarea definițiilor și tehnicilor de calcul
- Enunțarea principalelor rezultate
- Prezentarea unor exemple și contraexempluri clasice
- Analiza naturii sistemelor de vectori
- Crearea abilităților de raționament deductiv



Conținutul lecției

1. Dependență și independență liniară.
2. Sistem de generatori.
3. Bază.
4. Dimensiune
5. Coordonate.
6. Exerciții propuse
7. Bibliografie

Dependență și independență liniară.

Fie V spațiu vectorial peste corpul K .

Definiția 4.

Vectorul $x \in V$ se numește combinație liniară a vectorilor mulțimii

$S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, dacă există scalarii $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ astfel încât:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad (*).$$

Dacă scalarii $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, îndeplinesc condițiile:

$$\alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n \quad \text{și} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,$$

atunci relația (*) definește o combinație liniară convexă.

Sistem de generatori.

Definiția 5.

Vectorii $v_1, \dots, v_n \in V$ formează un sistem de generatori ai spațiului vectorial V dacă orice vector din V se scrie ca o combinație liniară a elementelor mulțimii S , adică: $\forall x \in V (\exists) \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ astfel încât $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

Definiția 6.

Vectorii $v_1, \dots, v_n \in V$ se numesc liniar independenți⁵ dacă orice combinație liniară a acestora se anulează numai dacă toți scalarii sunt nuli, adică din relația:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Definiția 7.

Vectorii $v_1, \dots, v_n \in V$ se numesc liniar dependenți dacă nu sunt liniar independenți.

Bază.

Definiția 8.

Sistemul de vectori $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ formează o bază a spațiului vectorial V dacă B este un sistem de generatori ai lui V și dacă este sistem liniar independent.

Definiția 9.

V/K este un spațiu vectorial finit dimensional sau de tip finit dacă are o bază finită.

Teorema 2

(de existență a bazei). Fie V/K un spațiu vectorial nenul, un sistem liniar independent $X \subset V$ și un sistem S de generatori pentru V , astfel încât $X \subset S$. Atunci există o bază a lui V/K astfel încât $X \subset B \subset S$.

Dimensiune

Definiția 9.

Fie V/K . Se numește dimensiunea lui V și se notează $\dim V$ numărul maxim de vectori liniar independenți.

Teorema 3.

Condiția necesară și suficientă ca un spațiu vectorial V peste K să aibă dimensiunea n este ca să admită o bază formată din n vectori.

⁵ noțiunea de independență liniară a vectorilor a fost introdusă de H. Grassmann (1878)

Teorema 4.

Toate bazele unui spațiu vectorial finit dimensional au același număr de vectori.

Coordonate.**Teorema 5** (teorema bazei).

Într-un spațiu vectorial finit dimensional orice vector se scrie, în mod unic, ca o combinație liniară a vectorilor unei baze a spațiului.

Demonstrație.

Fie $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ o bază a spațiului vectorial V și $v \in V$.

Existența. Cum B este un sistem de generatori al lui $V \Rightarrow (\exists) \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ astfel încât:
 $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

Unicitatea. Presupunem că $(\exists) \alpha'_1, \dots, \alpha'_n \in K$ astfel încât:

$$v = \alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_n v_n \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_n v_n$$

$$(\alpha_1 - \alpha'_1) v_1 + \dots + (\alpha_n - \alpha'_n) v_n = 0$$

Dar B este un sistem liniar independent, rezultă astfel:

$$\alpha_i - \alpha'_i = 0, \forall i=1, \dots, n \Leftrightarrow \alpha_i = \alpha'_i, \forall i=1, \dots, n.$$

Observații

1. Scalarii unici $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ se numesc coordonatele lui v în baza B .
2. Vectorul $v_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$ se numește vectorul coordonatelor lui v în baza B .
3. Fie $\mathcal{R}^n = \{x / x = (x_1, \dots, x_n)^t, x_i \in \mathcal{R}, i=1, \dots, n\}$ spațiul vectorial real față de adunarea vectorilor și înmulțirea cu scalar.

Vectorii $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^t, \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)^t$ formează o bază, numită baza standard sau canonică a spațiului $\mathcal{R}^n$.

Ținând seama de importanța în aplicații economice a spațiului vectorial $\mathcal{R}^n$ dăm următoarea teoremă privind verificarea rapidă a faptului că un sistem de n vectori $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{R}^n$ constituie o bază în $\mathcal{R}^n$.

Teorema 6.

Vectorii $v_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})^t, \dots, v_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})^t$ din $\mathcal{R}^n$ formează o bază în $\mathcal{R}^n \Leftrightarrow$ determinantul matricei asociate sistemului de vectori (matricea formată cu componentele vectorilor) este nenul.

Consecință.

Dacă $\det A = 0$ atunci sistemul de vectori nu formează o bază a lui $\mathcal{R}^n$.



Exerciții propuse

1. Să se arate că mulțimea $B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$, unde $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

, este o bază în $\mathbb{R}^3$ și să se găsească coordonatele vectorului $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ în această bază.

2. Să se arate că mulțimea $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ unde $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_3 =$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ este sistem liniar independent în $M_2(\mathbb{R})$.

3. Fie vectorii: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

Să se determine parametrul a astfel încât v_3 să fie combinație liniară a vectorilor v_1, v_2 și v_4 .

4. Să se arate că mulțimea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ unde $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ este bază în $M_2(\mathbb{R})$.

Considerând $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ să se găsească coordonatele lui V în baza B .

5. Construiți o bază diferită de baza canonică în $\mathbb{R}^4$.

Alegeți un vector din $\mathbb{R}^4$ și exprimați-l în baza găsită.

6. Construiți o bază în $M_2(\mathbb{R})$, primul vector fiind $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Ce condiții trebuie să îndeplinească scalarii α, β, γ astfel încât vectorii

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ \gamma^2 \end{pmatrix}$, din spațiul vectorial $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ să fie liniar dependenți?

8. Fie a, b, c vectori liniar independenți în $\mathbb{R}^4$. Cum sunt vectorii $a+b, a-b, a-2b+c$?

9. Formează $S = \{1, X, X^3\}$ în $\mathbb{R}[X]$ un sistem liniar independent?

10. Demonstrați că dacă $\mathfrak{R}/\mathbb{Q}$, atunci o condiție necesară și suficientă pentru ca vectorii 1 și ξ din $\mathfrak{R}$ să fie vectori liniar independenți este ca numărul real ξ să fie irațional.

11. În $X/\mathfrak{R}$, unde $X = \{x \in \mathfrak{R}^3 / x = (x_1, x_2, x_3)^t \text{ și } x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ și pentru $m, n \in \mathfrak{R}$ astfel încât $B = \{f_1 = (1, m, 3)^t, f_2 = (1, n, -1)^t\} \subseteq X$ este o bază în $X/\mathfrak{R}$, fie α_1 și α_2 coordonatele lui $v = (7/4, -3/4, 1/4)^t$ în baza B.

Atunci calculați: $m+n+\alpha_2-\alpha_1^2$.

12. Să se determine o bază și dimensiunea subspațiului vectorial $U = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 / v = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^t, \alpha_1 - 2\alpha_3 - \alpha_4 = 0, \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \right\}$.

13. Fie vectorii: $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathfrak{R}.$

Să se studieze natura mulțimii de vectori din $\mathfrak{R}^4$ în funcție de parametrul $\alpha \in \mathfrak{R}$.



Bibliografie

G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Suport de curs pentru ID-IFR, Editura Mustang, București, 2012
G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Matematici Economice, Editura Universitară, București, 2010
J. M. Mihăilă, Sinteza Matematica aplicata in economie, format digital, biblioteca electronica
S. Dedu, F. Serban, Matematici Aplicate in Economie, Editura A, 2017
C. E. N. Gal-Chiș, Matematici economice, Editura Emanuel, 2015
T. Stihi, R. Vidican, Algebra liniara, Geometrie analitica si diferentia, Ecuatii diferentiale. Teoria campurilor, Editura Fair Partners, Bucuresti 2006

CAPITOLUL 2 FUNCȚIONALE PE SPAȚII VECTORIALE

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 6

FUNCȚIONALE LINIARE ȘI BILINIARE



Obiectivele lecției

- Explicarea definițiilor și regulilor de calcul
- Enunțarea principalelor rezultate legate de functionale
- Prezentarea unor exemple și contraexemplu clasice
- Recunoașterea funcționalelor
- Crearea abilităților de raționament deductiv



Conținutul lecției

1. Funcționale pătratice (forme pătratice)
2. Funcționale biliniare
3. Funcționale liniare
4. Test de autoevaluare
5. Teme propuse
6. Bibliografie

Funcționale liniare

Fie V/K , unde $K \in \{R, C\}$. Studiem proprietatea funcțiilor⁶ $f : V \rightarrow \mathfrak{R}$ prin care fiecărui vector $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ reprezentat într-o anumită bază (în mod obișnuit în baza canonică), i se poate atașa un număr real $f(x)$.

Astfel se introduce instrumentul de evaluare numerică a rezultatelor activității agenților economici: cost, profit, etc.

Definiția 10.

Aplicația $f : V \rightarrow K$ este o **funcțională liniară** dacă satisface următoarele condiții:

⁶ Orice aplicație $f : V \rightarrow K$ se numește funcțională

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \forall x,y \in V - \text{aditivitatea}$$

$$f(\alpha x)=\alpha f(x) \quad \forall x \in V \text{ și } \forall \alpha \in K - \text{omogenitatea.}$$

Teorema 7.

Aplicația $f : V \rightarrow K$ este o funcțională liniară dacă și numai dacă $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $\forall \alpha, \beta \in K$ și $\forall x, y \in V$.

Demonstrație.

$$\Rightarrow f(\alpha x + \beta y) \stackrel{1}{=} f(\alpha x) + f(\beta y) \stackrel{2}{=} \alpha f(x) + \beta f(y)$$

($\alpha \in K$ și $x \in V$ iar $V/K \Rightarrow \alpha x \in V$. Analog $\beta y \in V$)

$\Leftarrow$ Relația $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ are loc pentru orice $\alpha, \beta \in K$ și orice $x, y \in V$.

Fie $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow$ relația devine $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in V$.

Fie $\alpha \in K$ arbitrar fixat și $\beta = 0 \Rightarrow$ relația devine $f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in V$.

Observație.

Funcționala liniară $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = cx = \sum_{i=1}^n c_i x_i$, unde $c = (c_1, \dots, c_n)$ și

$x = (x_1, \dots, x_n)^t$ se numește formă liniară.

Funcționale biliniare

Definiția 11.

Fie V/K și W/K , unde $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Aplicația $f : V \times W \rightarrow K$ este o funcțională biliniară dacă este liniară în fiecare argument.

Teorema 8.

Fie V/K , cu $\dim V = m$; W/K , cu $\dim W = n$; $B = \{e_1, \dots, e_m\}$ o bază a lui V și

$B' = \{l_1, \dots, l_n\}$ o bază a lui W . O funcțională biliniară $f : V \times W \rightarrow K$ se poate reprezenta matriceal

$$f(x, y) = x^T A y, \text{ unde } A \in M_{m,n}(K), A = (a_{ij})_{i,j}, a_{ij} = f(e_i, l_j).$$

Demonstrație: Reprezentând x și y în bazele B și B' obținem:

$$x = \sum_i x_i e_i \quad \text{și} \quad y = \sum_j y_j l_j.$$

$$\text{Deci} \quad f(x, y) = f\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j l_j\right) = \sum_i x_i f(e_i, \sum_j y_j l_j) = \sum_i \sum_j x_i f(e_i, l_j) y_j.$$

Dacă se notează cu $A \in M_{m,n}(K)$, $A = (a_{ij})_{i,j}$, $a_{ij} = f(e_i, l_j)$ matricea coeficienților funcționalei biliniare, atunci ea va avea forma $f(x, y) = x^T A y$.

Caz particular.

Pentru $V=W$ și $\dim V=n$ obținem $f : V \times V \rightarrow K$ este o funcțională biliniară $\Leftrightarrow (\exists) A \in M_n(K), A = (a_{ij})_{i,j}$ astfel ca $f(x,y) = x^T A y, \forall x,y \in V$.

Definiția 12.

O funcțională biliniară $f : V \times V \rightarrow K$ se numește simetrică dacă are loc: $f(x,y)=f(y,x), \forall x,y \in V$

Observație.

Funcțională biliniară $f:V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ este simetrică dacă și numai dacă $A = A^T$, adică matricea A este simetrică.



Test de autoevaluare

1. Fie $V=\mathbb{R}^n, W=\mathbb{R}$. Arătați că funcția profit total $\pi(x)=px=\sum_{i=1}^n p_i x_i$ este o funcțională liniară.

2. În spațiu vectorial $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ se definește aplicația $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ prin $f(x)=x_1+x_2$, unde $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Să se verifice dacă f este o funcțională liniară.

3. Într-un spațiu vectorial $V/\mathbb{R}$, cu $\dim V=n$, se dă o bază $B=\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$.

Fie funcționala $f:V \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\alpha_1+\dots+\alpha_n$,

unde $x=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$ (i.e. $[x]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$).

Să se verifice dacă f este o funcțională liniară.

4. Stabiliți dacă funcționalele următoare sunt liniare:

a) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=5x_1+x_2-x_3+2x_4$

b) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=9-2x_1+x_2+3x_3-x_4$, unde $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

5. Construiți o funcțională liniară pe $V=\mathbb{R}^4$.

6. Fie $V \subset \mathbb{R}^2$ și $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ o funcțională biliniară cu $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Scrieți f .

7. Fie $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y)=x_1 y_1 - x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_2 y_2 - 3x_3 y_3$.

Arătați că f este formă biliniară pe $\mathbb{R}^3$.

8. Pe $V=\mathbb{R}^4$ construiți o formă biliniară simetrică.

9. Fie $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = f(x) = 2x_1y_2 - x_2y_3 + x_2y_2$.

Arătați că funcționala este biliniară.

10. Fie $V \subset \mathbb{R}^2$. Să se scrie forma pătratică asociată matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Pe spațiul vectorial $V \subset \mathbb{R}^2$ se dă forma pătratică $h(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$

Să se scrie forma biliniară simetrică asociată.

13. Pe $V = \mathbb{R}^4$ construiți o formă pătratică.

Raspunsuri

1. Da
2. Da
3. Da
4. a) da
b) nu

Teme propuse

1. Pe exemplul unui agent economic având dimensiunea spațiului ieșirilor din sistem egală cu 4 construiți funcția profit total și arătați că este o funcțională liniară.
2. Pe exemplul unui agent economic având dimensiunea spațiului intrărilor în sistem egală cu 5 construiți funcția cost total și arătați că este o funcțională liniară.
3. Să se determine funcționala liniară $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ care îndeplinește următoarele condiții:

$$f(v_1)=2, f(v_2)=4, f(v_3)=3, \text{ unde } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Demonstrați că mulțimea funcționalelor liniare $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ formează un spațiu vectorial real (numit spațiul vectorial dual și notat cu M).

5. Să se arate că $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y) = x_1y_2 - x_2y_3 + x_3y_1$

unde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, este funcțională biliniară. Să se scrie matricea funcționalei în baza

canonică și în baza $B = \{g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

Bibliografie



G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Suport de curs pentru ID-IFR, Editura Mustang, București, 2012
G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Matematici Economice, Editura Universitară, București, 2010
J. M. Mihăilă, Sinteza Matematica aplicata in economie, format digital, biblioteca electronica
S. Dedu, F. Serban, Matematici Aplicate in Economie, Editura A, 2017
C. E. N. Gal-Chiș, Matematici economice, Editura Emanuel, 2015
T. Stihi, R. Vidican, Algebra liniara, Geometrie analitica si diferentiala, Ecuatii diferentiale. Teoria campurilor, Editura Fair Partners, Bucuresti 2006

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 7

FORME PĂTRATICE. NATURA LOR. CLASIFICARE.



Obiectivele lecției

- Prezentarea conceptului de forma patratica
- Explicarea definitiilor si a regulilor de calcul
- Enuntarea principalelor rezultate
- Prezentarea unor exemple si contraexemple clasice
- Recunoasterea structurii caracteristice
- Crearea abilitatilor de rationament deductiv



Conținutul lecției

1. Forme patraticice
2. Definitie, terminologie si notatii
3. Proprietati (rezultate)
4. Natura formelor patraticice
5. Reducerea la forma canonica
6. Metodele Jacobi si Gauss
7. Exerciitii propuse



Funcționale pătraticice (forme pătraticice)

Definiția 13.

Fie $V/\mathbb{R}$. Functia $h: V \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcțională pătratică a spațiului vectorial V dacă există funcționala biliniară simetrică $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$h(x) = f(x, x), \forall x \in V.$$

Teorema 9.

Oricărei funcționale biliniare simetrice $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ îi corespunde o singură funcțională pătratică $h: V \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc relația $h(x) = f(x, x) \quad \forall x \in V$.

Reciproc. Oricărei funcționale pătraticice îi corespunde o singură funcțională biliniară simetrică.

Demonstrație: Implicația directă este evidentă.

$$\begin{aligned} \Leftarrow h(x+y) &= f(x+y, x+y) = f(x, x+y) + f(y, x+y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) \\ &= f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y) \Leftrightarrow h(x+y) = h(x) + h(y) + 2f(x, y) \\ &\Leftrightarrow f(x, y) = (1/2)[h(x+y) - h(x) - h(y)]. \end{aligned}$$

Teorema 10.

Fie $V/\mathfrak{R}$, cu $\dim V = n$. Aplicația $h : V \rightarrow \mathfrak{R}$ este o funcțională pătratică a spațiului vectorial V dacă și numai dacă există $A \in M_n(\mathfrak{R})$ astfel încât $h(x) = x^T A x, \forall x \in V$.

Natura (clasificarea) funcționalelor pătratice

Fie $h : V \rightarrow \mathfrak{R}$ o funcțională pătratică a spațiului vectorial V .

- $h(x)$ este pozitiv definită dacă $h(x) > 0, \forall x \in V - \{0\}$.
- $h(x)$ este semipozitiv definită dacă $h(x) \geq 0, \forall x \in V$.
- $h(x)$ este negativ definită dacă $h(x) < 0, \forall x \in V - \{0\}$.
- $h(x)$ este seminegativ definită dacă $h(x) \leq 0, \forall x \in V$.
- $h(x)$ este nedefinită dacă există $x_1, x_2 \in V$, cu $x_1 \neq x_2$, astfel încât $h(x_1) > 0$ și $h(x_2) < 0$.

Stabilirea calității unei funcționale pătratice de a fi pozitivă sau negativ definită este o etapă foarte importantă în cercetarea existenței optimului unei funcții reale de variabilă vectorială (Analiză Matematică cu aplicații în economie). Ce metode există în acest sens?

Pentru a determina natura unei forme pătratice, aceasta trebuie adusă la forma standard.

Metoda Jacobi

Această metodă constă în aducerea funcționalei pătratice cu matricea A la o nouă funcțională pătratică având matricea B – diagonală și se bazează pe trecerea de la baza inițială $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la o nouă bază $B_1 = (b_1, \dots, b_n)$ numită baza canonică sau normală, în raport cu care funcționala pătratică se scrie ca o sumă de pătrate.

Teorema Jacobi⁷

Fie $h : V \rightarrow \mathfrak{R}$ o funcțională pătratică a spațiului vectorial V exprimată în baza $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$, $h(x) = x^T A x, \forall x \in V$ (unde $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$, $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ sunt valorile funcționalei biliniare simetrice asociate pe mulțimea vectorilor bazei B_0).

Dacă toți minorii principali ai matricei A , $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots$,

$\Delta_n = \det A$, sunt nenuli, atunci există baza $B_1 = (b_1, \dots, b_n)$ a lui V astfel încât:

⁷ Jacobi Carl Gustav Jacob (1804-1851)

$$h(x) = (1/\Delta_1)\xi_1^2 + (\Delta_1/\Delta_2)\xi_2^2 + \dots + (\Delta_{n-1}/\Delta_n)\xi_n^2$$

unde $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ sunt coordonatele lui x în noua bază.

Din această teoremă se deduc câteva proprietăți importante ale funcționalelor pătratice:

i) funcționala pătratică este pozitiv definită $\Leftrightarrow \Delta_h > 0, \forall h=1, \dots, n$.

ii) funcționala pătratică este negativ definită $\Leftrightarrow \Delta_h > 0$ pentru h par și $\Delta_h < 0$ pentru h impar.

Dacă există $\Delta_h > 0$ și $\Delta_h < 0$ și nu se încadrează în situația ii) $\Rightarrow$ funcționala pătratică este nedefinită.

Dacă există $\Delta_h = 0$ atunci natura funcționalei pătratice nu poate fi stabilită prin metoda Jacobi ci se apelează la metoda Gauss.

Metoda Gauss

Fie
$$h(x) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j$$

➤ Dacă $a_{11} \neq 0$, se grupează într-o paranteză toți termenii care conțin

pe x_1 pentru a obține un pătrat perfect, restul termenilor aflându-se în afara acesteia.

$$\begin{aligned} h(x) &= (a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n) + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2 = \\ &= a_{11}^{-1}[a_{11}^2x_1^2 + 2a_{11}(a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n)] + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2 = \\ &= a_{11}^{-1}[a_{11}^2x_1^2 + 2a_{11}x_1(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + (a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2] - a_{11}^{-1}(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + \\ &+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2 = a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + h_1(x) \end{aligned}$$

(unde $h_1(x)$ este o funcțională pătratică în care apar doar variabilele $x_2, \dots, x_n$).

Efectuând transformarea liniară:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \xi_1,$$

$$x_i = \xi_i, \forall i=2, \dots, n,$$

Obținem

$$h(x) = a_{11}^{-1}\xi_1^2 + h_1(x).$$

➤ Dacă $a_{11} = 0$, căutăm un indice $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $a_{jj} \neq 0$.

Dacă găsim un asemenea indice renumerotăm variabilele astfel încât variabila j să devină prima variabilă și în continuare procedăm ca în primul caz.

➤ Dacă $a_{11} = 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, există un indice i astfel încât $a_{ii} \neq 0$ și efectuăm transformarea:

$$x_1 = \lambda_1 - \lambda_i$$

$$x_i = \lambda_1 + \lambda_i, \text{dacă } j \neq 1 \text{ și } j \neq i.$$

$$x_j = \lambda_j$$

Astfel coeficientul lui λ_1^2 este nenul și procedăm mai departe ca în primul caz.

Același procedeu se aplică și funcționalei pătratice $h_1(x)$ în care apar doar variabilele $x_2, \dots, x_n$.

Se continuă algoritmul până la epuizarea tuturor variabilelor, când obținem:

$$h(x) = (k_1)\xi_1^2 + (k_2)\xi_2^2 + \dots + (k_n)\xi_n^2.$$

Observație.

Rezultatele la care se ajunge aplicând metodele lui Gauss sau Jacobi pot fi identice sau nu. Ele sunt tot forme canonice.

Teorema de mai jos arată motivul pentru care, aplicând două metode de determinare a formei canonice, este nesemnificativă obținerea de expresii diferite.

Teorema inerției (Sylvester)

Numărul coeficienților strict pozitivi, strict negativi și nuli este invariant la schimbarea bazei canonice.



Exercitii propuse

1. Să se reducă la forma canonică, forma pătratică $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3$$

Raspuns
$$h(x) = \frac{1}{\Delta_1} \zeta_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \zeta_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \zeta_3^2 = \frac{1}{2} \zeta_1^2 + 2\zeta_2^2 + 2\zeta_3^2$$

2. Pe $V = \mathbb{R}^4$ construiți o formă pătratică pozitiv definită.
3. Pe $V = \mathbb{R}^4$ construiți o formă pătratică negativ definită.
4. Studiați natura formelor pătratice:
 - a) $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$
 - b) $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
 - c) $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$
 - d) $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$
 - e) $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x_1x_3 + x_2x_3$
 - f) $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2$
5. Prin exemple concludente puneți în evidența metoda Gauss de reducere a formelor pătratice la forma canonică ($V = \mathbb{R}^4$).
6. Să se determine valorile parametrului real λ pentru care următoarele forme pătratice sunt pozitiv, respectiv negativ definite:
 - a) $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x_1^2 + (\lambda + 3)x_2^2 - 2(\lambda + 1)x_1x_2$

b) $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$

7. Să se verifice teorema de inerție pentru forma pătratică

$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_2x_3.$



Bibliografie

G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Suport de curs pentru ID-IFR, Editura Mustang, București, 2012
G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Matematici Economice, Editura Universitară, București, 2010
J. M. Mihăilă, Sinteza Matematica aplicata in economie, format digital, biblioteca electronica
S. Dedu, F. Serban, Matematici Aplicate in Economie, Editura A, 2017
C. E. N. Gal-Chiș, Matematici economice, Editura Emanuel, 2015
T. Stihi, R. Vidican, Algebra liniara, Geometrie analitica si diferentia, Ecuatii diferentiale. Teoria campurilor, Editura Fair Partners, Bucuresti 2006

PARTEA a-III-a

ELEMENTE DE ANALIZA MATEMATICA

CAPITOLUL 3 FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE REALE

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 8 Teoria diferențială a funcțiilor vectoriale reale

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 9 Optimizarea funcțiilor vectoriale reale

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 8

TEORIA DIFERENȚIALĂ A FUNCȚIILOR VECTORIALE REALE



Obiectivele lecției

- Explicarea definițiilor și regulilor de derivare
- Enunțarea principalelor rezultate
- Prezentarea unor exemple
- Realizarea deprinderilor de calcul
- Crearea abilităților de raționament deductiv



Conținutul lecției

1. Derivate parțiale pentru funcții de mai multe variabile.
2. Derivate parțiale de ordin 2. Matricea hessiană.
3. Exemplu .
4. Derivata după o direcție. Diferențiala unei funcții de mai multe variabile
5. Derivabilitatea și diferențiabilitatea funcțiilor compuse
6. Test de autoevaluare
7. Teme propuse
8. Bibliografie

Derivate parțiale pentru funcții de mai multe variabile.

În continuare vom extinde în mod natural noțiunile de diferențială și de derivată de la funcții de o variabilă reală cu valori reale la funcții definite pe o mulțime din R^n cu valori în R^m .

Definiția 25.

a) Spunem că $f : D \subset R^2 \rightarrow R$ este derivabilă parțial în raport cu variabila x în punctul interior $(a, b) \in D$, dacă există și este finită, limita din raportul creșterilor:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = f'_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

numită derivata parțială în raport cu x a funcției f în punctul (a, b)

b) Spunem ca funcția $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă parțial în raport cu variabilă y în punctele (a, b) dacă există și este finită, următoarea limită:

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} = f'_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

numită derivata parțială în raport cu y a funcției f în punctul (a, b) .

Definiția 26. (Generalizare).

Spunem că funcția $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă parțial în raport cu variabila x_k în punctul interior $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$, dacă există și este finită următoarea limită:

$$\lim_{x_k \rightarrow a_k} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{x_k - a_k} = f'_{x_k}(a_1, \dots, a_n) = \frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_k}$$

Dacă f admite derivate parțiale în raport cu fiecare variabilă $x_1, \dots, x_n$, în punctul

$a = (a_1, \dots, a_n) \in D$, vectorul derivatelor parțiale $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ se numește gradientul funcției f în punctul a și se notează $\nabla f(a)$.

Derivate parțiale de ordin 2. Matricea hessiană.

Derivatele de ordin superior au apărut în același timp cu întreg aparatul calculului diferențial și au fost intens aplicate de Newton⁸ și Leibnitz⁹ la sfârșitul secolului XVII-lea în rezolvarea unor probleme de geometrie, mecanică sau fizică.

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, care admit derivate parțiale de primul ordin $f'_x : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ și $f'_y : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Dacă funcțiile f'_x și f'_y sunt derivabile parțial în raport cu x și y , atunci derivatele lor se vor numi derivate parțiale de ordinul al doilea ale funcției f și le

vom nota cu:

$$f''_{x^2} = (f'_x)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

⁸ Newton Isaac (1642-1727), matematician, mecanician, fizician și astronom englez. În matematica a pus (începând din 1665, concomitent cu G. Leibnitz, dar independent de acesta) bazele calculului diferențial și integral.

⁹ Leibnitz Gottfried Wilhelm (1646-1716), matematician și filozof german.

$$f''_{y^2} = (f'_y)y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f''_{xy} = (f'_x)y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f''_{yx} = (f'_y)x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Generalizare.

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție care admite derivate parțiale de ordin I, $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$.

Dacă aceste funcții admit derivate parțiale în raport cu variabila x_i , adică există $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right)$

, spunem că f admite derivate parțiale de ordinul doi și acestea se notează cu $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ sau

$$f''_{x_j x_i}.$$

Putem ordona derivatele parțiale de ordin doi într-o matrice, numită matrice hessiană:

$$H(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_j} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

Exemplu.

Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + \sin(x + y^2)$.

Observăm că această funcție admite derivate parțiale de orice ordin, fiind o compunere de funcții elementare.

Sa se calculeze derivatele parțiale deprimul si al doilea ordin.

Ultimele două derivate parțiale se numesc derivate mixte și observati că sunt egale.

Este natural să ne întrebăm dacă pentru orice funcție, derivatele mixte sunt egale, adică dacă nu contează ordinea de derivare.

În general ele sunt diferite, însă Leonhard Euler¹⁰ descoperise prin anul 1734 condiții în care aceste derivate coincid.

¹⁰ 1707-1783

Răspunsul a fost dat de matematicianul german Hermann Amandus Schwartz¹¹, cu posibilitatea de a fi extins și la derivatele mixte de ordin superior.

Teorema Schwartz.

Fie funcția $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ și un punct interior $(x_0, y_0) \in D$.

Dacă funcția f admite derivate parțiale mixte de ordinul al doilea într-o vecinătate a punctului (x_0, y_0) și acestea sunt continue în (x_0, y_0) , atunci:

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}$$

Derivata după o direcție. Diferențiala unei funcții de mai multe variabile

Definiția 27.

Fie $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$. Se definește derivata funcției f după direcția vectorului

$$D_v f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ și există dacă există limita.}$$

Teorema 3.

Dacă $f \in C^1$ atunci $D_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v$

Observații

1. Dacă alegem $v = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ sau $v = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., respectiv $v = e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$ se deduce că derivatele

parțiale sunt derivatele după direcția vectorilor de coordonate:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = D_{e_1} f(x), \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = D_{e_n} f(x)$$

2. Când $\varepsilon \rightarrow 0$, vectorul $\varepsilon v \rightarrow 0$, deci oricare ar fi vectorul v normat, $\|\varepsilon v\| = |\varepsilon|$ și prin urmare vectorul εv este un vector mic, pe care-l notăm $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$ unde $dx_j = \varepsilon v_j$.

¹¹ 1843-1921

Definiția 28.

$D_{dx} f(x) = \nabla f(x) \cdot dx$, unde $dx = \varepsilon v$, $\varepsilon \rightarrow 0$, se numește diferențială a funcției f și se notează $df(x)$. Ea comensurează efectul asupra funcției f , a modificărilor mici $dx_1, \dots, dx_n$ ale variabilelor $x_1, \dots, x_n$.

Definiția 29. Numim diferențiala de ordin k : $d^k f(x) = d(d^{k-1} f(x))$

Caz particular:
$$d^2 f(x) = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \cdot dx_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \cdot dx_2^2$$

Derivabilitatea și diferențiabilitatea funcțiilor compuse

Operațiile algebrice efectuate asupra funcțiilor care admit derivate parțiale sau asupra funcțiilor diferențiabile conduc la funcții de același tip.

Importanța noțiunii de diferențiabilitate constă în faptul că ea se conservă și prin operația de compunere a funcțiilor, în timp ce existența derivatelor parțiale poate să nu fie conservată prin această operație.

Teorema 4.

Dacă funcțiile $u, v: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au derivatele $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$ continue pe D și dacă funcția de două

variabile $f(u, v): E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ are derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ continue pe E , atunci funcția

$f(u(x), v(x)) = F(x)$ are derivata continuă pe D , dată de formula:

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Diferențiala de ordinul întâi este invariantă față de operația de compunere a funcțiilor:

$$dF(x) = F'(x)dx = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot dv$$

$$dF(x) = df(u(x), v(x)) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot dv$$

Generalizare.

Fie funcția compusă: $f(u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) = F(x)$.

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{du_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \cdot \frac{du_n}{dx}$$

$$dF(x) = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot du_2 + \dots \frac{\partial f}{\partial u_n} \cdot du_n$$



Test de autoevaluare

1. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calculați $\nabla f(1, 1)$.

Soluție $\nabla f(1, 1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Teme propuse

1. Să se arate că $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

admite derivate parțiale în origine.

2. Să se calculeze derivatele parțiale de primul ordin într-un punct generic, pentru funcția

$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, folosind regulile de derivare.

3. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi pentru următoarele funcții:

a) $f(x, y) = x^y$

b) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

c) $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x}$

4. Fie $f(x_1, x_2) = 10x_1 + 4x_2 + 2x_1x_2 + \frac{400}{x_1x_2}$ cu $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

Să se calculeze $\nabla f(x)$; $\nabla f(2, 5)$.

5. Fiind dată $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y^3 + e^x \sin y$ să se calculeze

$\nabla f(1, \pi)$; $H_f(1, \pi)$.

6. Determinați coeficienții $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + \alpha \cdot x_1^2 \cdot x_2 + \beta \cdot x_1 x_2^2,$$

să admită punctul $a = (1, 1)$ punct staționar.



Bibliografie

G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Suport de curs pentru ID-IFR, Editura Mustang, București, 2012
G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Matematici Economice, Editura Universitară, București, 2010
J. M. Mihăilă, Sinteza Matematica aplicata in economie, format digital, biblioteca electronica
S. Dedu, F. Serban, Matematici Aplicate in Economie, Editura A, 2017
C. E. N. Gal-Chiș, Matematici economice, Editura Emanuel, 2015
T. Stihi, R. Vidican, Algebra liniara, Geometrie analitica si diferentiala, Ecuatii diferentiale. Teoria campurilor, Editura Fair Partners, Bucuresti 2006

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 9

OPTIMIZAREA FUNCȚIILOR VECTORIALE REALE

Obiectivele lecției



- Explicarea definițiilor și a regulilor de calcul
- Enunțarea principalelor rezultate
- Realizarea optimizării funcțiilor
- Crearea abilităților de raționament deductiv



Conținutul lecției

1. Funcții omogene.
2. Proprietățile Euler
3. Funcția de producție Cobb-Douglas
4. Optimizarea funcțiilor fără restricții
5. Algoritmul de generare a punctelor de optim
6. Test de autoevaluare
7. Teme propuse
8. Bibliografie

Funcții omogene.

Definiția 30.

Funcția $f : R^n \rightarrow R$ este **omogenă de grad m** dacă există $\lambda \in R - \{0\}$,

$$f(\lambda x) = \lambda^m \cdot f(x).$$

Proprietățile Euler¹²

Teorema 5 (a gradientului).

¹² Euler Leonhard (1707-1783), matematician, mecanician și astronom elvetian.

Opera sa vastă, cuprinsă în aproape 1200 de memorii, conține cercetări în aproape toate ramurile matematicii, numeroase teoreme, formule și noțiuni fiind legate de numele său.

Fie $f : R^n \rightarrow R$ o funcție omogenă de grad m .

Atunci în orice punct $x \in R^n$ ea verifică identitatea Euler: $\nabla f(x) \bullet x = m \cdot f(x)$

Teorema 6 (a hessianei).

Fie $f : R^n \rightarrow R$, $f \in C^2$ pe $D \subset R^n$ și f omogenă de grad m atunci în orice punct

$x \in D \subset R^n$ verifică identitatea:

$$X^T H_f(x) = m(m-1) \cdot f(x)$$

Optimizarea funcțiilor fără restricții

Definiția 31.

Fie $f : D \subset R^n \rightarrow R$. Spunem că f are un punct de maxim (minim) local $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ dacă $f(x) \leq f(a)$ (respectiv $f(x) \geq f(a)$) $(\forall) x \in U_a \cap D$.

Definiția 32.

Punctul $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ este maxim (minim) global pentru funcția $f : D \rightarrow R$ dacă $f(x) \leq f(a)$ (respectiv $f(x) \geq f(a)$) $(\forall) x \in D$.

Definiția 33.

Un punct în care derivatele parțiale se anulează se numește punct staționar.

Observație.

Primul pas în determinarea punctelor de extrem este aflarea punctelor staționare, adică rezolvarea sistemului care anulează toate derivatele parțiale de ordinul întâi.

Nu toate punctele staționare sunt puncte de extrem.

Teorema 7.

Punctul staționar $a \in D$ al funcției $f : D \subset R^n \rightarrow R$ este punct de maxim (respectiv de minim) local în vecinătatea $V \subset D$ dacă forma pătratică $d^2 f(x)$ este negativ (respectiv pozitiv) definită pe V .

Observație.

Dacă forma pătratică $d^2 f(a)$ este și pozitivă dar și negativă în V_a , atunci punctul a nu este nici punct de maxim, nici de minim (este un punct șa).

Algoritmul de generare a punctelor de optim

1. Se determină punctele staționare din sistemul de n ecuații și n necunoscute $\nabla f(x) = 0$.

2. Se calculează matricea hessiană $H_f(x)$

3. Verificăm dacă punctul “ a ” este punct de optim:

Calculăm $H_f(a)$ și cercetăm sensul determinanților $\Delta_1, \Delta_2, \dots$

i) dacă toți $\Delta_j > 0, \forall j = \overline{1, n} \Rightarrow a$ este punct de minim

ii) dacă $\begin{cases} \Delta_j > 0, j.par \\ \Delta_j < 0, j.impar \end{cases} \Rightarrow a$ este punct de maxim

dacă $n=2$ și $\Delta_2 < 0$ atunci $a = (a_1, a_2)$ este punct șa.

Dacă există $\Delta_j = 0$ nu putem preciza natura punctului a prin această metodă ci studiem semnul formei pătratice $d^2 f(x)$, într-o vecinătate a punctului staționar “ a ”.

4. Se reiau calculele de la punctul 3 pentru celelalte puncte staționare, dacă există.

Optimizarea funcțiilor de mai multe variabile condiționate prin restricții de tip egalitate

Multe probleme de maxim sau de minim apar când se cere să se determine extremele unei funcții supuse unor condiții suplimentare, numite de obicei legături.

Fie $\max (\min) f(x)$ și $g_j(x) = c_j, j = \overline{1, p}, x \in R^n$

Dacă $f, g_j \in C^2$ se aplică metoda multiplicatorilor Lagrange¹³.

Metoda constă în următoarele etape:

I.1) Construim funcția Lagrange (au lagrangeanul) ca o combinație liniară între funcția de optimizat $f(x)$ și restricțiile $g_j(x)$, acestea fiind introduse cu coeficienți $\lambda_j \in R$:

¹³ Lagrange Joseph Louis (1736-1813), matematician si mecanician francez.

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^p \lambda_j [g_j(x) - c_j]$$

unde λ_j se numesc multiplicatori Lagrange.

2) Se determină punctele staționare ale funcției lagrange, $L: R^{n+p} \rightarrow R$.

Se obține sistemul algebric cu $(n+p)$ ecuații și $(n+p)$ necunoscute: $\nabla L(x, \lambda) = 0$.

Fie (x^*, λ^*) soluția sistemului.

3) Înlocuim multiplicatorii $(\lambda_j^*)_j = \overline{1, p}$ în funcția Lagrange și calculăm matricea hessiană pentru funcția $\Phi(x) = L(x, \lambda^*)$.

4) Calculăm matricea hessiană H_Φ în punctul staționar x^* , $H_\Phi(x^*)$. Dacă $H_\Phi(x^*)$ este negativ definită, atunci x^* este un punct de maxim; dacă $H_\Phi(x^*)$ este pozitiv definită, atunci x^* este un punct de minim. Dacă $H_\Phi(x^*)$ este pozitiv sau negativ semidefinită, atunci trecem la etapa a doua:

II. 1) Calculăm: $d^2\Phi(x^*) = (dx)^T H_\Phi(x^*) dx$

2) Se calculează diferențiala restricțiilor în punctul x^* și se obține sistemul de (p) ecuații în necunoscutele $dx_1, \dots, dx_n$:

$$dg_j(x^*) = 0, \quad j = \overline{1, p} \quad \text{sau} \quad \nabla g_j(x^*) \cdot dx = 0, \quad j = \overline{1, p}$$

sistem liniar omogen în necunoscutele $(dx_i)_i = \overline{1, n}$.

3) Se rezolvă sistemul de mai sus și se găsesc soluțiile nebanale. Se obțin astfel cele r necunoscute principale ce depind de celelalte $n-r$ necunoscute secundare.

4) Se rescrie $d^2\Phi(x^*)$ în funcție de cele $n-r$ necunoscute.

5) Se studiază natura formei pătratice :

- dacă $d^2\Phi > 0 \Rightarrow x^*$ punct de minim;

- dacă $d^2\Phi < 0 \Rightarrow x^*$ punct de maxim.

În caz contrar punctul nu este optim.



Teme propuse

1. Să se arate că funcția $f: D \subset R^2 \rightarrow R$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot (\ln y - \ln x)$ cu

$D = \{(x, y); x > 0, y > 0\}$ este omogenă.

Să se precizeze gradul de omogenitate și să se verifice relația lui Euler.

2. Să se determine extremele funcției $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, cu legătura $xyz = 1$.

Raspuns (1,1,1) este punct de minim local

3. Determinați punctele de extrem pentru următoarele funcții:

a. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1^3 + 4x_1x_2 - 2x_1^2x_2$

b. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

c. $f(x_1, x_2) = 10x_1 + 4x_2 + 2x_1x_2 + \frac{400}{x_1x_2}, \quad x_1 > 0, x_2 > 0$.

Raspunsuri

3. b. Originea este punct de minim local si global

c. (2,5) este punct de minim local.

Bibliografie



G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Suport de curs pentru ID-IFR, Editura Mustang, București, 2012
G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Matematici Economice, Editura Universitară, București, 2010
J. M. Mihăilă, Sinteza Matematica aplicata in economie, format digital, biblioteca electronica
S. Dedu, F. Serban, Matematici Aplicate in Economie, Editura A, 2017
C. E. N. Gal-Chiș, Matematici economice, Editura Emanuel, 2015
T. Stihi, R. Vidican, Algebra liniara, Geometrie analitica si diferentia, Ecuatii diferentiale. Teoria campurilor, Editura Fair Partners, Bucuresti 2006

PARTEA a-IV-a

MATEMATICI FINANCIARE

CAPITOLUL 4 ELEMENTE DE MATEMATICI FINANCIARE

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 10

Plasamente financiare

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 11

Inflație și devalorizare. Rambursarea împrumuturilor

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 10

PLASAMENTE FINANCIARE



Obiectivele lecției:

- Definirea noțiunilor de dobândă simplă și compusă
- Studiul plasamentelor financiare
- Aplicarea formulelor de calcul



Conținutul lecției:

1. Introducere
2. Dobânda
3. Dobânda simplă
4. Problema echivalării procentelor exprimate în unități de timp diferite
5. Scadența comună și scadență medie
6. Procent mediu de depunere
7. Dobânda compusă
8. Sume încadrate într-un proces de dobândă compusă

Bibliografie

1. Introducere

În sistemul activităților economice intervine noțiunea de operațiune financiară.

Operațiunile financiare reprezintă modalități de plasare a unor sume de bani, în condiții stabilite și cu un anumit scop, de către un partener P_1 către un alt partener P_2 .

2. Dobânda

Definiția 1

Numim funcție de acumulare o aplicație $\alpha: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definită prin: $\alpha(t)$ = suma de bani acumulată la momentul de timp $t (\geq 0)$ când s-a făcut o investiție inițială de 1 u.m.

Proprietăți

1. $\alpha(0)=1$;
2. α e funcție crescătoare;
3. funcția $\alpha(t)$ este continuă.

Definiția 2

Valoarea finală sau *valoarea revenită* partenerului ce a plasat suma S_0 pe durata de timp t este o funcție:

$$S: [0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty) \quad \text{definită prin} \quad S(S_0, t) = S_0 \cdot \alpha(t)$$

Proprietăți

1. $S(S_0, 0) = S_0$;
2. $2.S(0, t) = 0$;
3. 3. valoarea finală este funcție continuă și crescătoare în raport cu timpul;
4. $\frac{\partial S(S_0, t)}{\partial S_0} = \alpha(t) \geq 1$ și $\frac{\partial S(S_0, t)}{\partial S_0} = S_0 \alpha'(t) > 0$.

Definiția 3 (definiția matematică a dobânzii)

Dobânda corespunzătoare plasării sumei de bani S_0 pe durata de timp t este diferența dintre valoarea finală și suma inițială S_0 .

Apare evident: $D: [0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty)$ $D(S_0, t) = S(S_0, t) - S_0$ ⁽¹⁾

sau, echivalent $D(S_0, t) = S_0 \cdot [\alpha(t) - 1]$.

Definiția 4

Dacă $t = 1$ an și $S_0 = 100$ unități monetare, atunci dobânda corespunzătoare se numește **procent** și se notează cu p , iar dacă $t = 1$ an și $S_0 = 1$ u.m., atunci dobânda corespunzătoare se numește dobândă unitară anuală (rata efectivă a dobânzii) și se notează cu i .

Avem: $i = \alpha(1) - \alpha(0) = \alpha(1) - 1$. Rezultă întotdeauna relația: $p = 100 i$.

Definiția 5

Factorul de fructificare este cantitatea: $u = \alpha(1) = 1 + i$.

Definiția 6

Funcția de actualizare (reducere) este inversa funcției de acumulare, adică $\alpha^{-1}(t)$. Obținem:

$$S_0 = S_t \cdot \alpha^{-1}(t).$$

Definiția 7

Factorul de actualizare este expresia funcției de actualizare pentru $t=1$ an.

Astfel: $\alpha^{-1}(1) = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{u} = v.$

3. Dobânda simplă

Definiția 8

Dacă pe întreaga durată de plasare t valoarea considerată în calcul a sumei S_0 nu se modifică, vom spune că avem un proces de dobândă simplă sau că plasarea sumei S_0 s-a efectuat în regim de dobândă simplă.

Ipotezele unui proces de dobândă simplă sunt prezentate în varianta următoare: suma S_0 este plasată pe durata de timp t în regim de dobândă simplă cu procentul anual p (sau cu dobânda unitară $p=100i$).

Atunci, dobânda simplă corespunzătoare este dată de:

$$D_s: [0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty)$$

$$D_s(S_0, t) = S_0 \cdot i \cdot t = S_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot t, [t] = \text{ani}$$

Pot fi deduse prin calcul următoarele mărimi numite și elemente ale dobânzii simple:

a) expresia matematică a funcției de acumulare în cazul dobânzii simple este:

$$\alpha(t) = 1 + it$$

Suma revenită $S_t = S(S_0, t)$ este dată de relația: $S(S_0, t) = S_0 \cdot (1 + i \cdot t) = S_t$

b) suma inițială sau valoarea actuală S_0 este dată de relația:

$$S_0 = \frac{S(S_0, t)}{1 + i \cdot t} = S_t \cdot \alpha^{-1}(t).$$

Deci, $\alpha^{-1}(t) = \frac{1}{(1 + i \cdot t)}$ este funcția de actualizare pentru dobânda simplă.

Rezultă că putem scrie:

Suma finală = suma inițială x factor de fructificare și

Suma inițială = suma finală x factor de actualizare.

c) procentul de plasare p și dobânda unitară i sunt date de relația:

$$i = \frac{S(S_0, t) - S_0}{S_0 \cdot t} = \frac{D_s(S_0, t)}{S_0 \cdot t} \quad \text{și} \quad p = i \cdot 100 = \frac{S(S_0, t) - S_0}{S_0 \cdot t} \cdot 100$$

d) durata de plasare t sau scadența operațiunii este dată de relația:

$$t = \frac{S(S_0, t) - S_0}{S_0 \cdot i} = \frac{S(S_0, t) - S_0}{S_0 \cdot p} \cdot 100$$



Exercitiu propus

O persoană creează un depozit de valoare nominală $S_0 = 1.050.000$ lei.

Pentru păstrarea acestui depozit, persoana plătește firmei respective, în avans, un comision de 1,5% lunar.

Durata prevăzută a depozitului este de 7 săptămâni.

Să se determine valoarea comisionului plătit firmei de către deponent.

4. Problema echivalării procentelor exprimate în unități de timp diferite

Presupunem cunoscut procentul nominal anual p ; ne propunem să determinăm procentul nominal lunar corespunzător q .

Astfel:

➤ depozitul S_0 , cu procentul anual “ p ” peste 1 an, devine: $S_1 = S_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

➤ depozitul S , cu procentul lunar “ q ”, peste 1 an devine: $S_2 = S_0 \cdot \left(1 + \frac{12q}{100}\right)$

Din condiția $S_1 = S_2$, se deduce $q = \frac{p}{12}$

5. Scadența comună și scadență medie

Fie $S_1, S_2, \dots, S_n$ mai multe sume plasate în regim de dobândă simplă pe duratele $t_1, t_2, \dots, t_n$ cu același procent p .

Presupunând că înlocuim aceste sume și durate printr-o sumă unică S și o durată unică t , astfel încât suma dobânzilor aduse de $S_1, S_2, \dots, S_n$ să fie egală cu dobânda adusă de S pe durata t cu același procent p , avem:

$$\frac{S_1 \cdot pt_1}{100} + \frac{S_2 \cdot pt_2}{100} + \dots + \frac{S_n \cdot pt_n}{100} = \frac{S \cdot pt}{100}$$

sau
$$\sum_{i=1}^n S_i t_i = S \cdot t$$

Ultima ecuație conține două necunoscute S și t.

În cazul în care se cunoaște S, putem determina durata t, numită scadență comună:

$$t = \frac{\sum_{i=1}^n S_i t_i}{S}$$

Dacă $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \sum_{i=1}^n S_i$ obținem:
$$t = \frac{\sum_{i=1}^n S_i t_i}{\sum_{i=1}^n S_i}$$

Această durată se numește scadență medie.

6. Procent mediu de depunere

Fie sumele $S_1, S_2, \dots, S_n$ plasate pe duratele $t_1, t_2, \dots, t_n$ cu procente $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Dorim să determinăm *procentul mediu* p pentru care aceste sume plasate pe aceleași durate să dea aceeași dobândă totală.

Avem:
$$\sum_{i=1}^n \frac{S_i p_i t_i}{100} = \sum_{i=1}^n \frac{S_i p t_i}{100} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{S_i p_i t_i}{100} = p \sum_{i=1}^n \frac{S_i t_i}{100}$$

$$p = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{S_i p_i t_i}{100}}{\sum_{i=1}^n \frac{S_i t_i}{100}}$$



Exercitiu de autoevaluare

Să se calculeze procentul mediu de depunere pentru sumele:

- 5 mil. lei cu 4% pe timp de 45 zile;
- 2 mil. lei cu 5% pe timp de 30 zile;
- 25 mil. lei cu 2% pe timp de 100 zile.

Soluție: 2,22 %

7. Dobânda compusă

Definiția 9

Dacă valoarea luată în calcul a sumei plasate S_0 se modifică periodic pe durata de timp t după o anumită regulă, iar între două modificări consecutive sumei modificate i se aplică o dobândă simplă, atunci spunem că avem un proces de dobândă compusă.

8. Sume încadrate într-un proces de dobândă compusă

În calculele dobânzii compuse se folosește de obicei dobânda unitară i ($i = \frac{p}{100}$) și nu aceea adusă de 100 u.m. ca la dobânda simplă.

În cazul general, problema se prezintă astfel:

- se cunoaște durata unei perioade de timp (perioada de fructificare);
- se cunoaște procentul nominal “ p ” de dobândă;
- se cunoaște valoarea nominală S_0 a depozitului;
- numărul t de perioade.

Notăm: $S(S_0, t) = S_t$ - valoarea finală sau suma disponibilă după t perioade $i = \frac{p}{100}$ = dobânda unitară (corespunzătoare unei perioade).

Atunci:

- la sfârșitul perioadei 1, valoarea depozitului devine: $S_1 = S_0(1 + \frac{p}{100}) = S_0(1 + i)$

- la sfârșitul perioadei 2, valoarea depozitului devine:

$$S_2 = S_1(1 + \frac{p}{100}) = S_0(1 + \frac{p}{100})^2 = S_0(1 + i)^2$$

- la sfârșitul perioadei “ t ”, valoarea depozitului devine:

$$S_t = S_{t-1}(1 + \frac{p}{100}) = S_0(1 + \frac{p}{100})^t = S_0(1 + i)^t \quad (*)$$

Funcția de acumulare în cazul plasamentelor în regim de dobândă compusă este:

$$\alpha(t) = (1 + i)^t, t \geq 0.$$

Factorul de fructificare este $1 + i = u$.

În tabelele financiare se găsește calculat u^t pentru diferite procente (unitatea de timp este considerată anul). În aceste condiții, avem: $S_t = S_0 \cdot u^t$.

Dobânda compusă va fi: $D_c(S_0, t) = D_c = S_t - S_0 = S_0(u^t - 1)$

Dacă perioada t nu este un număr întreg, sunt posibile două soluții:

a) se folosește formula generală (*) pentru partea întreagă și se aplică dobânda simplă pentru partea fracționară.

Această soluție se numește soluție rațională;

b) formula (*) stabilită pentru t întreg, se aplică și în cazul când t este fracționar. Aceasta este soluție comercială.

a) Soluția rațională

Fie t_k = numărul de părți ale anului împărțit în k diviziuni.

Notăm: $t = n + \frac{t_k}{k}$.

După n ani, valoarea finală obținută prin plasarea sumei inițiale S_0 va fi:

$$S_n = S_0(1+i)^n.$$

Dobânda simplă produsă de suma S_n în timpul fracțiunii $\frac{t_k}{k}$ a anului (cu dobânda unitară i) va fi:

$$S_n \cdot i \cdot \frac{t_k}{k} = S_0(1+i)^n \cdot i \cdot \frac{t_k}{k} \Rightarrow S_t = S_{n+\frac{t_k}{k}} = S_0(1+i)^n + S_0(1+i)^n \cdot i \cdot \frac{t_k}{k}$$

$$S_t = S_{n+\frac{t_k}{k}} = S_0(1+i)^n \left(1 + i \cdot \frac{t_k}{k}\right)$$

Dobânda corespunzătoare va fi: $D_c\left(S_0; n + \frac{t_k}{k}\right) = S_0 \left[(1+i)^n \left(1 + i \cdot \frac{t_k}{k}\right) - 1 \right].$

Definiția 10

Două procente corespunzătoare la perioade de timp diferite sunt proporționale dacă raportul lor este egal cu raportul perioadelor respective de fructificare.

Exemplu

Procent anual 60%; procent semestrial 30%; procent trimestrial 15%; procent lunar 5%.

Observație.

În regim cu dobândă simplă, două procente proporționale conduc la o sumă de aceeași valoare finală.

Evident, nu aceeași este situația în cazul dobânzii compuse, când valoarea finală crește dacă se calculează pe aceeași perioadă, dar fracționată.

Astfel, cu dobânda unitară anuală i_a , valoarea dobândită de 1 u.m. la sfârșitul anului va fi $1+i_a$.

Cu dobânda unitară semestrială $i_s = \frac{i_a}{2}$, valoarea dobândită de 1 u.m. la sfârșitul anului cu o

dobândă compusă va fi: $(1+i_s)^2 = (1+\frac{i_a}{2})^2 = 1+i_a + \frac{i_a^2}{4} > 1+i_a$

Deci, folosind procente proporționale, observăm că dobânda calculată semestrial este cu $\frac{i_a^2}{4}$

mai mare decât dobânda calculată cu procentul anual.

Definiția 11

Două procente corespunzătoare la perioade de fructificare diferite sunt echivalente dacă pentru o aceeași durată de plasament, ele conduc la o aceeași valoare finală.

În general, pentru dobânda unitară i_k corespunzătoare fracțiunii $\frac{1}{k}$ a anului, echivalența este

dată de relația: $1+i = (1+i_k)^k$.

Rezultă: $1+i_2 = (1+i)^{\frac{1}{2}}$, $1+i_4 = (1+i)^{\frac{1}{4}}$, $1+i_{12} = (1+i)^{\frac{1}{12}}$, $1+i_2 = (1+i)^{\frac{1}{2}}$.

b) Soluție comercială

Pentru a extinde formula generală a dobânzii compuse în cazul când t este fracționar, folosim procente echivalente.

Considerăm: $t = n + \frac{h}{k}$. În n ani, suma inițial plasată S_0 devine: $S_n = S_0(1+i)^n$.

Pe o fracțiune k a anului, 1 u.m. devine $1+i_k$, iar pe t_k fracțiuni el devine $(1+i_k)^{t_k}$.

$$S_t = S_{n+\frac{t_k}{k}} = S_n(1+i_k)^{t_k} = S_0(1+i)^n(1+i_k)^{t_k} = S_0(1+i)^n(1+i)^{\frac{t_k}{k}} = S_0(1+i)^{n+\frac{t_k}{k}}$$

Rezultă astfel: $S_t = S_0(1+i)^t$ (11)

Observație.

Valoarea $(1+i)^{\frac{t_k}{k}} = u^{\frac{t_k}{k}}$ se găsește în tabelele financiare.

S-a observat că atunci când calculul dobânzii se face pe fracțiuni de an, dobânda adusă până la sfârșitul anului (calculată cu procentul anual) diferă de aceea calculată pe fracțiuni de an.

Exercitiu

Presupunând că am plasat suma de 10.000\$ cu procentul de 8%, să se efectueze calculul dobânzii de două ori pe an.

Observatie

Notăm: $100 i_k$ = procentul efectiv si $100 j_k$ = procentul nominal (k reprezintă numărul de subperioade în care este împărțit anul)

j_k = dobânda unitară anuală nominală

i_k = dobânda unitară anuală efectivă.

Avem: $j_k = k \cdot i_k \Leftrightarrow i_k = \frac{j_k}{k}$

$$1 + i = (1 + i_k)^k \Rightarrow 1 + i = \left(1 + \frac{j_k}{k}\right)^k \Rightarrow i = \left(1 + \frac{j_k}{k}\right)^k - 1$$

$$1 + \frac{j_k}{k} = (1 + i)^{\frac{1}{k}}, \quad j_k = k[(1 + i)^{\frac{1}{k}} - 1] \quad (12)$$

Cu aceste formule putem trece de la dobânda unitară efectivă la cea nominală și invers.

Între cele două dobânzi există relația $j < i$.



Bibliografie

G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Suport de curs pentru ID-IFR, Editura Mustang, București, 2012
G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Matematici Economice, Editura Universitară, București, 2010
J. M. Mihăilă, Sinteza Matematica aplicata in economie, format digital, biblioteca electronica
S. Dedu, F. Serban, Matematici Aplicate in Economie, Editura A, 2017
C. E. N. Gal-Chiș, Matematici economice, Editura Emanuel, 2015
T. Stihi, R. Vidican, Algebra liniara, Geometrie analitica si diferentia, Ecuatii diferentiale. Teoria campurilor, Editura Fair Partners, Bucuresti 2006

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 11

INFLAȚIE ȘI DEVALORIZARE

RAMBURSAREA ÎMPRUMUTURILOR



Obiectivele lecției

- Definirea conceptelor de inflație și devalorizare
- Introducerea noțiunilor de factor de fructificare aparent
- Enunțarea principalelor rezultate



Conținutul lecției

1. Inflație.
2. Devalorizare
3. Rambursarea împrumuturilor
4. Rambursarea prin anuități temporare imediate
5. Enunțarea principalelor rezultate
6. Exemplu
7. Bibliografie

Inflație. Devalorizare.

Definiția 12 Inflația este fenomenul general de ajustare, pe cale monetară, a tensiunilor existente într-un ansamblu socio-economic caracterizat prin creșterea nivelului general al prețurilor și deprecierea monedei¹⁴.

Evident, inflația reprezintă pierderea puterii de cumpărare în timp.

Definiția 13 Devalorizarea înseamnă modificarea voluntară a parității unei monede. Prin aceasta se diminuează valoarea-aur a unității monetare, deci se modifică valoarea sa de schimb cu alte monede.

¹⁴ Butescu V: Matematici financiare, Ed. Lucman, 2000.

Definiția 14 Deprecierea înseamnă constatarea unei pierderi de valoare a unei monede afectată pe plan intern de inflație și pe plan extern de deteriorarea termenilor de schimb în legătură cu un dezechilibru pronunțat și de durată al balanței de plăți.

Observație Devalorizarea nu trebuie confundată cu deprecierea monedei.

Rata dobânzii (dobânda unitară anuală) când este eliminată inflația este numită adesea rata reală a dobânzii și este notată i .

Definiția 15 Dat fiind procentul anual de devalorizare $100\ r$, numim r **coeficientul anual unitar de devalorizare** (rata medie a inflației).

Observație.

Fără devalorizare	În condiții de devalorizare
1 u.m. $\xrightarrow{1 \text{ an}}$ $1+i$ u.m.	1 u.m. $\xrightarrow{1 \text{ an}}$ $\frac{1+i}{1+r}$ u.m.

Comparând r și i constatăm că:

- dacă $r < i$ atunci există un câștig;
- dacă $r = i$ atunci câștigul este nul;
- dacă $r > i$ atunci plasamentul se face în pierdere.

Pentru plasamente în regim de dobândă compusă, funcția de acumulare devine:

- $\alpha(t) = (1+i)^t$ dacă nu există devalorizare;

- $\alpha(t) = \left(\frac{1+i}{1+r}\right)^t$ dacă există devalorizare.

Definiția 16 Când coeficientul r este cunoscut și se

folosește în mod corespunzător pentru a împiedica deprecierea sau pierderea de valoare a monedei, atunci are loc o **devalorizare controlată** și $1+r$ devine **factor de compensare a devalorizării**. În cazul devalorizării controlate se operează cu procent anual aparent, impunându-se relația: 1 u.m. $\xrightarrow{1 \text{ an}}$ $1+j=(1+i)(1+r)$ u.m.

Definiția 17 Factorul de fructificare aparent este $1+j=(1+i)(1+r)$, iar $j=i+r+ir$ este **dobânda unitară anuală aparentă**.

În condiții de devalorizare controlată, în regim de dobândă compusă, funcția de acumulare devine:

$$\alpha(t) = (1+i)^t (1+r)^t = (1+j)^t.$$

Concluzie

Scenariu Funcție	Nu există devalorizare	Există devalorizare necontrolată	Există devalorizare controlată
$\alpha(t)$	$(1+i)^t$	$\left(\frac{1+i}{1+r}\right)^t$	$(1+i)^t (1+r)^t$
$\alpha^{-1}(t)$	$(1+i)^{-t}$	$\left(\frac{1+i}{1+r}\right)^{-t}$	$(1+i)^{-t} (1+r)^{-t}$
S_t	$S_0(1+i)^t$	$S_0\left(\frac{1+i}{1+r}\right)^t$	$S_0(1+i)^t (1+r)^t$

Rambursarea împrumuturilor

Definiția 36 În sens general, se numește **împrumut** o operațiune financiară prin care un partener P_1 plasează o sumă de bani de care el dispune, la un moment dat, pe o perioadă de timp și în anumite condiții, unui alt partener P_2 de care acesta are nevoie. De obicei, partenerul P_1 este numit **creditor**, iar partenerul P_2 se numește **debitor**.

Operațiunea prin care partenerul P_2 plătește partenerului P_1 suma de care a beneficiat se numește **rambursare** sau **amortizare** a împrumutului. Dacă împrumutul nu se mai înapoiază parțial sau total atunci el se numește parțial sau total nerambursabil.

Astfel împrumutul este o operațiune financiară cu 2 componente: creditarea și rambursarea.

Practic, aceste componente reprezintă operațiuni de plăți eşalonate, ceea ce conduce la utilizarea tuturor conceptelor și rezultatelor din capitolul precedent. Mai mult, clasificarea

plăților eşalonate conduce la o anumită clasificare a împrumuturilor în raport cu diversele modalități de creditare și rambursare.

Deoarece creditarea și rambursarea nu sunt concomitente, evident valorile finale corespunzătoare diferă. Singurul element comun celor două componente îl reprezintă valoarea actuală a rambursării (adică valoarea împrumutată, evaluată la începutul rambursării) care coincide cu valoarea finală a creditării.

În sistemul clasic, rambursarea unui împrumut constă în plata, la intervale egale sau nu, care reprezintă părți din suma împrumutată, la care se adaugă dobânda asupra sumei neachitate la începutul perioadei la care se face plata, calculată cu procente egale sau nu de la o perioadă de timp la alta.

Definiția 37 Sumele rambursate anual care au rolul de a amortiza treptat suma împrumutată se numesc **amortismente**.

Modalitățile de amortizare a sumelor împrumutate și ale dobânzilor aferente se stabilesc de fiecare instituție creditoare.

Notatii:

V_0 = suma împrumutată la momentul în care începe rambursarea (numită “valoare nominală” a împrumutului (creditului) acordat);

t = perioada de timp în care se face rambursarea;

n = numărul perioadelor de timp pe care se face împrumutul (considerate egale: ani, semestre etc.)

[Observație: sfârșitul ultimei perioade reprezintă “scadența” împrumutului]

t_k = perioada de timp dintre două plăți consecutive;

i_k = dobânda anuală unitară corespunzătoare per. de timp t_k ;

- în perioada “ k ” vom nota prin:

Q_k = plata efectuată în contul împrumutului care se realizează la un anumit moment din

intervalul de timp t_k , numită amortisment și care satisface relația
$$\sum_{k=1}^n Q_k = V_0 ;$$

d_k = dobânda totală corespunzătoare datoriei rămase la un moment dat din intervalul t_k ;

S_k = suma efectivă plătită în perioada t_k sau rata corespunzătoare t_k , determinată astfel:

$S_k = Q_k + d_k, \quad \forall k = \overline{1, n};$

V_k = valoarea datoriei rămase după achitarea amortismentului Q_k , adică $V_k = V_0 - \sum_{i=1}^k Q_i ;$

R_k = valoarea datoriei rambursate după achitarea amortismentului Q_k . Au loc relațiile:

$$V_n = 0, V_{n-1} = Q_n \cdot R_k = \sum_{i=1}^k Q_i \quad V_0 = R_n \quad V_k + R_k = V_0.$$

Rambursarea prin anuități temporare imediate

Definiția 38 Spunem că rambursarea se efectuează

prin anuități temporare imediate, dacă plățile corespunzătoare se fac în următoarele condiții:

- anual, posticipat sau anticipat;
- într-un număr de ani bine precizat;
- prin sume egale sau nu de la un an la altul;
- imediat ce s-a fixat începerea rambursării;
- cu procente egale sau nu de la un an la altul.

Considerăm: $S(d_k), A(d_k), k = \overline{1, n}$ - valoarea finală, respectiv valoarea actuală a dobânzii d_k ;

$S(D), A(D)$ – costul împrumutului suportat de debitor, evaluat la sfârșitul ultimului an de plată și respectiv, la începutul primului an de plată.

Au loc egalitățile:

$$S(D) = \sum_{k=1}^n S(d_k), \quad A(D) = \sum_{k=1}^n A(d_k)$$

care arată că *suma tuturor dobânzilor actualizate la un moment dat este egală cu costul împrumutului la momentul respectiv.*

Procedeul de amortizare poate fi sintetizat sub aspect informațional prin tabelul de mai jos, denumit tablou de amortizare, ordinea de prezentare a elementelor tabloului nefiind semnificativă.

Acest tablou este valabil oricare ar fi legea de anuități pentru care nu s-a formulat nici o ipoteză.

Per t_k	Valoarea împrumutului la începutul perioadei t_k (V_{k-1})	Amortismentul în perioada t_k (Q_k)	Dobânda pe datoria rămasă la începutul perioadei t_k (d_k)	Rata din perioada t_k (S_k)	Împrumut rambursat la sfârșitul perioadei t_k (R_k)	Valoarea împrumutului la finele perioadei t_k (V_k)
t_1	V_0	Q_1	d_1	$S_1 = Q_1 + d_1$	$R_1 = Q_1$	$V_1 = V_0 - R_1$
t_2	V_1	Q_2	d_2	$S_2 = Q_2 + d_2$	$R_2 = Q_1 + Q_2$	$V_2 = V_0 - R_2$
....						
t_k	V_k	Q_k	d_k	$S_k = Q_k + d_k$	$R_k = \sum_{i=1}^k Q_i$	$V_k = V_0 - R_k$
....						
t_n	V_{n-1}	Q_n	d_n	$S_n = Q_n + d_n$	$R_n = V_0$	$V_n = V_0 - R_n = 0$

Propoziția 7 Dacă amortizarea se efectuează prin anuități temporare imediate, cu plăți anticipate și dobânda anticipată, cu același procent anual $p=100i$ și cu:

a) anuități egale, adică $S_k=S, \forall k=\overline{1,n}$, atunci au loc egalitățile: $Q_k = V_0 i \frac{(1-i)^{n-k}}{1-(1-i)^n}$

$$S_k = V_0 i \frac{1}{1-(1-i)^n} \quad V_k = V_0 \frac{1-(1-i)^{n-k}}{1-(1-i)^n};$$

b) amortismente egale, $Q_k=Q, \forall k=\overline{1,n}$, atunci au loc egalitățile: $Q_k = \frac{V_0}{n}$

$$S_k = \frac{V_0}{n} [1+i(n-k)]$$

Propoziția 8 Dacă amortizarea se efectuează prin anuități temporare imediate, cu plăți posticipate și dobânda posticipată, cu același procent anual $p=100i$ și cu:

a) anuități egale, adică $S_k=S, \forall k=\overline{1,n}$, atunci au loc

$$\text{egalitățile: } Q_k = V_0 i \frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \quad S_k = V_0 i \frac{(1+i)}{(1+i)^n - 1} \quad V_k = V_0 \frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1};$$

b) amortismente egale, $Q_k=Q, \forall k=\overline{1,n}$, atunci au loc egalitățile: $Q_k = \frac{V_0}{n}$

$$S_k = \frac{V_0}{n} [1+i(n-k+1)] \quad V_k = \frac{V_0}{n} (n-k).$$



Bibliografie

G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Suport de curs pentru ID-IFR, Editura Mustang, București, 2012
G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Matematici Economice, Editura Universitară, București, 2010
J. M. Mihăilă, Sinteza Matematica aplicata in economie, format digital, biblioteca electronica
S. Dedu, F. Serban, Matematici Aplicate in Economie, Editura A, 2017
C. E. N. Gal-Chiș, Matematici economice, Editura Emanuel, 2015
T. Stîhi, R. Vidican, Algebra liniara, Geometrie analitica si diferentiale, Ecuatii diferentiale. Teoria campurilor, Editura Fair Partners, Bucuresti 2006

PARTEA a-V-a

APLICAȚII IN DOMENIUL ECONOMICO-FINANCIAR

CAPITOLUL 5 APLICAȚII ECONOMICE

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 12 Funcții de producție

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 14

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 12

FUNCȚII DE PRODUCȚIE



Obiectivele lecției

- Explicarea notiunilor
- Enunțarea principalelor rezultate
- Prezentarea unor exemple și contraexemple clasice
- Crearea abilităților de raționament deductiv



Conținutul lecției

1. Interpretarea economică a derivatei parțiale
2. Funcția de producție Cobb-Douglas
3. Test de autoevaluare
4. Indicatori economici
5. Aplicații propuse
6. Bibliografia

Interpretarea economică a derivatei parțiale

Analiza economică folosește curent funcții de mai multe variabile și în raport cu specificul analizei, mulțimea acestor funcții se clasifică în:

La producător	La consumator
- funcții de producție	- funcții de consum
- funcții de ofertă	- funcții de cerere
- funcții de cost	- funcții de venit

Pentru funcțiile de producție $y = F(x_1, \dots, x_n)$, unde $x_1, \dots, x_n$ sunt factori utilizați, derivatele parțiale $\frac{\partial F(x)}{\partial x_j}$ comensurează eficiența utilizării unei unități suplimentare din factorul x_j (când ceilalți factori rămân neschimbați) și se numesc randamente marginale.

Funcția de producție Cobb-Douglas

Funcția Cobb - Douglas este folosită atât în microeconomie, cât și în macroeconomie și este înrudită și cu funcția de producție din managementul producției care reprezintă o funcție specială a funcției de producție CES. Această funcție a fost dezvoltată de economiștii americani Paul Douglas și Charles Cobb în anul 1928.

Forma generală a funcției Cobb-Douglas este: $y = c \prod_i x_i^{a_i}$ cu $c, a_i > 0$, unde c este parametrul de nivel care poate lipsi în cazul unei normări adecvate, iar a_i sunt elasticitățile parțiale ale lui y respectiv x_i .

Funcția este omogenă de gradul $\sum a_i$.

Funcția Cobb-Douglas poate fi utilizată ca și funcție de utilitate, dar și ca și funcție de producție¹⁵.

Exemplu

S-a determinat funcția de producție $y = F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$ pentru o firmă. Din datele statistice se știe că $\alpha = \beta = 0,5$ și în anul de bază producția firmei a fost de $y_0 = 800$ milioane u.m. la o dotare cu factori $K_0 = 1$ miliard u.m. și $L_0 = 2000$ persoane (forța de muncă). Determinați efectul creșterii cu 1,5 milioane u.m. a volumului capitalului și cu două persoane, a nivelului forței de muncă.

Soluție: Se constată că sporul factorilor $\Delta K = 0,0015$ (mld. u.m.) și $\Delta L = 0,002$ (mii persoane) reprezintă modificări mici în raport cu nivelul lor, deci se poate studia efectul acestor modificări cu ajutorul diferențialei:

$$dy = \frac{\partial F}{\partial K} \cdot dK + \frac{\partial F}{\partial L} \cdot dL = \nabla F(K_0, L_0) \cdot \begin{pmatrix} dK \\ dL \end{pmatrix}$$

$$\nabla F(K_0, L_0) = \left(\frac{\partial F(K_0, L_0)}{\partial K}, \frac{\partial F(K_0, L_0)}{\partial L} \right) = \left(A\alpha K_0^{\alpha-1} \cdot L_0^\beta, A\beta \cdot K_0^\alpha \cdot L_0^{\beta-1} \right)$$

¹⁵ Paul Douglas, Richard Cobb: „A Theory of Production“ in American Review, Vol. 18 (1928), Papers and roceedings, pag. 139-165

Cum $\alpha = \beta = 0,5$ se determină $A = \frac{y_0}{\sqrt{K_0 L_0}} = 0,4\sqrt{2}$.

$K_0 = 1$ mld u.m.; $L_0 = 2$ mii persoane $\Rightarrow \nabla f(1,2) = \left(0,2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}; 0,2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0,4; 0,2)$

Atunci sporul de producție va fi

$$dy = (0,4; 0,2) \cdot \begin{pmatrix} dK \\ dL \end{pmatrix} = (0,4; 0,2) \cdot \begin{pmatrix} 0,0015 \\ 0,002 \end{pmatrix} = 0,001 \text{ mld u.m.}$$

Deci un spor de 1 mil. u.m.

Test de autoevaluare

1. Fie $F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$.

Cercetați dacă F este funcție omogenă și, în caz afirmativ, precizați gradul de omogenitate.

2. S-a determinat funcția de producție $y = f(K, L) = AK^\alpha L^\beta$ pentru o firmă.

Din datele statistice se știe că $\alpha = \beta = 0,5$ și în anul de bază producția firmei a fost de $y_0 = 800$ milioane u.m. la o dotare cu factori $K_0 = 1$ miliard lei și $L_0 = 2000$ persoane (forța de muncă). Determinați efectul creșterii cu 1,5 milioane u.m. a volumului capitalului și cu două persoane, a nivelului forței de muncă.

Fie $y = \frac{KL}{\alpha K + \beta L}$, funcția de producție pentru o firmă, în care K este volumul capitalului fix.

și L este volumul forței de muncă.

a. Cercetați în funcție de α și β gradul de omogenitate al funcției de producție și verificați cele două proprietăți Euler pentru funcții omogene.

a. Dacă în anul de bază $t = 0$ cifra de afaceri a firmei a fost $y_0 = 5$ mld.u.m., determinați parametrul β , știind că $\alpha = 1$.

b. Proiectați evoluția producției pentru α și β găsite la punctul a) pe o perioadă de 3 ani, în următoarele scenarii:

c₁) crește capitalul firmei cu un ritm mediu anual de 10 % și forța de muncă cu un ritm mediu de 5 %;

c₂) crește capitalul fix și forța de muncă cu același ritm, 10 %.

Să se determine punctele de optim dacă există.

Raspunsuri

1. da, $m = \alpha + \beta$

Observație.

Deci funcția de producție Cobb-Douglas are gradul de omogenitate $m = \alpha + \beta$ [sau, în cazul general, $m = \sum \alpha_i$].

2.: un spor de 1 mil u.m.

3. a. da, $m-1$

Indicatori economici

Considerăm o funcție de producție de tip Cobb-Douglas $F(K, L)$, unde K este capitalul, iar L este forța de muncă.

Expresiile analitice ale indicatorilor marginali pentru o funcție

- *productivitatea marginală a muncii:* $\eta_L = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L}$.
- *randamentul marginal al capitalului:* $\eta_K = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K}$.

Productivitatea marginală a fiecăruia dintre factorii de producție (K, L) este sporul de producție care se obține prin utilizarea unei unități suplimentare din factorul de producție respectiv, cantitatea folosită din celalalt factor rămânând neschimbată.

Expresiile analitice ale indicatorilor medii.

- *productivitatea medie a muncii:* $\overline{\eta}_L = \frac{F(K, L)}{L}$
- *randamentul mediu al capitalului:* $\overline{\eta}_K = \frac{F(K, L)}{K}$

Corelația dintre indicatorii marginali și indicatorii medii:

$$\eta_L = \alpha \cdot \overline{\eta}_L^2 \quad \text{și} \quad \eta_K = \beta \cdot \overline{\eta}_K^2$$

Interpretarea economică: Productivitățile marginale ale factorilor sunt proporționale cu pătratul productivității medii ale factorilor la această firmă. Mai mult, în condiții de optim,

pe piața concurenței perfecte, η_L și η_K sunt proporționale cu salariul nominal real, respective cu costul real unitar al capitalului, coeficientul de proporționalitate fiind multiplicatorul Lagrange λ .

Deci, în condiții de optim, salariul nominal real este proporțional cu pătratul productivității muncii, analog costul unitar real al profitului trebuie să fie proporțional cu pătratul randamentului mediu al capitalului.

A doua formă de *exprimare analitică* se poate face **în raport cu indicatorul de înzestrare tehnică a muncii** $\left(k = \frac{K}{L}\right)$.

Se poate evidenția dependența productivității marginale de efortul de înzestrare tehnică k .

Indicatorii de elasticitate.

Elasticitatea unui fenomen economic F în raport de o variabilă independentă x indică numărul de procente cu care se modifică F ca reacție la modificarea lui x cu un procent.

Elasticitatea producției în raport cu factorul L este: $E_L = \frac{\Delta F}{F} : \frac{\Delta L}{L}$

sau, în cazul continuu: $E_L = \frac{\partial F}{\partial L} : \frac{F}{L}$.

Analog găsim: $E_K = \frac{\partial F}{\partial K} : \frac{F}{K}$.

Expresiile analitice ale indicatorilor de elasticitate: $E_L = \frac{\eta_L}{\eta_L}$; $E_K = \frac{\eta_K}{\eta_K}$.

Astfel, elasticitatea reflectă raportul între randamentele lor medii.

Deci elasticitățile producției în raport cu cei doi factori sunt proporționale cu randamentele medii ale acestor factori (pentru firma cercetată).

Indicatorii de elasticitate în raport cu înzestrarea tehnică (k), verifică proprietatea:

$$E_L + E_K = 1$$

Aplicatii propuse

1. Determinați parametrii funcției de producție Cobb-Douglas, astfel încât să fie funcție omogena de grad 1.
2. Fie $y = AK^\alpha L^\beta$ funcția de producție pentru o firmă, cu $\alpha = \beta = 0,5$.
3. Studiați în funcție de α și β gradul de omogenitate al funcției de producție și verificați cele două proprietăți Euler pentru funcții omogene.
4. Producția anuală a unei firme este descrisă prin funcția de producție $y=F(K,L,M)$, unde K (volumul capitalului fix (mil. lei)), L (volumul forței de muncă (persoane)), iar M (volumul consumului de materii prime și energie) este proporțional cu volumul producției, $M=mY$. Să se determine condițiile necesare și suficiente în care firma își maximizează profitul anual brut, cunoscând costul unitar al factorilor: c_1 = costul amortizărilor unității de capital fix, c_2 = salariul mediu anual pe o persoană angajată a firmei.
5. Calculați matricea hessiană pentru funcția de producție de tip Cobb-Douglas cu trei variabile K, L, M.
6. Aceeași problemă, când funcția de producție identificată este de tip:
 - a. SATO, cu $\alpha = 1, \beta = 2$;
 - b. Allen, cu $\alpha = 0,01; \beta = 0,02; \rho = 0,5$;
 - c. CES, cu $\alpha = 0,5; \beta = 0,5; \rho = 0,5$.
7. Scrieți diferențialele de ordin 2 ale funcțiilor de producție în punctul K_0 și L_0 și precizați natura formelor pătratice obținute.

Pentru funcțiile de producție de tip Cobb-Douglas

i. $F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$.

ii. $F(K, L) = \frac{KL}{\alpha K + \beta L}$.

- a. studiați omogenitatea
- b. în caz afirmativ precizați gradul de omogenitate și verificați proprietățile Euler
- c. calculați indicatorii marginali, medii, de elasticitate și determinați relația dintre ei.

Soluție:

- a) $F(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K)^\alpha (\lambda L)^\beta = A\lambda^{\alpha+\beta} K^\alpha L^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} \cdot F(K, L) \Rightarrow F$ este omogenă de grad $m = \alpha + \beta$.

Observație. Deci funcția de producție Cobb-Douglas are gradul de omogenitate $m = \alpha + \beta$ [sau, în cazul general, $m = \sum \alpha_i$].

8. Determinați parametrii funcțiilor de producție Cobb-Douglas, CES, SATO și ALLEN, astfel încât să fie funcții omogene de grad 1.
9. Verificați identitățile Euler pentru fiecare funcție și calculați indicatorii marginali, medii, de elasticitate și stabiliți relația dintre ei.

10. Fie $Y = F(K, L)$ o funcție de producție omogenă de grad 1. Se cere:

a) Y în funcție de înzestrarea tehnică a muncii $k = \frac{K}{L}$

b) Să se exprime randamentele marginale în funcția de k .

c) Aplicație pentru funcțiile de la exercițiul 2

11. Considerăm funcția de producție cu trei factori $Y = F(K, L, E)$, unde E = consumul de energie al firmei. Scrieți diferențialele de ordin 1 și 2, când funcția este de tip Cobb-Douglas, $Y = AK^\alpha L^\beta E^\delta$.

12. Să se determine condițiile necesare și suficiente în care firma își maximizează profitul anual brut, cunoscând costul unitar al factorilor: c_1 = costul amortizărilor unității de capital fix, c_2 = salariul mediu anual pe o persoană angajată a firmei.

Aplicație pentru funcția de producție Cobb-Douglas $y = AK^\alpha L^\beta M^\delta$. Interpretare economică.

13. Se consideră funcția de utilitate $U(x, y) = x^{0,5} y^{0,6}$, unde x și y reprezintă cantitățile consumate de bunuri X și Y . Să se arate că:

- a) curbele de indiferență asociate acestei funcții de utilitate sunt descrescătoare. Sunt ele liniare, concave sau convexe?
- b) Calculați utilitățile marginale ale bunurilor X și Y .
- c) Scrieți diferențiala funcției de utilitate. Deduceți expresia ratei marginale de substituție între bunuri.

d) Fie $y = \frac{KL}{\alpha K + \beta L}$, funcția de producție pentru o firmă, în care K este volumul

capitalului fix în valoare de 2 mld.u.m. și L este volumul forței de muncă de 1000 persoane.

c) reprezentați grafic izocuantele corespunzătoare nivelului de activitate $y_0 = 5$ mld.u.m. și $y_1 = 10$ mld. u.m.

e) Fie $y = AK^\alpha L^\beta$ funcția de producție pentru o firmă, cu $\alpha = \beta = 0,5$.

a) Știind că pentru un volum al forței de muncă de 1000 de persoane și un capital fizic de 40000 milioane u.m. s-a obținut o producție $y_0=40000$ (mil.u.m.); determinați constanta A ; proiectați evoluția producției pe o perioadă de 5 ani în următoarele scenarii:

V₁) - crește capitalul firmei cu un ritm mediu anual de 10% și forța de muncă cu un ritm mediu de 5%.

V₂) – crește capitalul fix și forța de muncă cu același ritm, 10%.

b) Reprezentați grafic izocuantele corespunzătoare nivelului $y_0=40000$ și $y_1=60000$ (mil. u.m.) .

c) Formulați modelul matematic de fundamentare a deciziei optime :

1) pentru maximizarea cifrei de afaceri, când bugetul disponibil este $B=19000$ (mil.

u.m.) costurile cu factorii fiind: salariul nominal lunar $S_L = 1,4\text{mil. u.m.}$, costul de oportunitate a capitalului $c=0,1$ (adică 10% din valoarea capitalului).

2) pentru minimizarea costurilor, când se urmărește obținerea unei producții $y=50$ mld. u.m., cu aceleași costuri de la 1)

3) pentru maximizarea profitului brut obținut de o firmă.

d) In fiecare caz de la punctul d) scrieți condițiile necesare de optim și determinați optimul, verificând prin condiția de ordin 2, natura acestuia.

14. Considerăm un consumator având funcția de utilitate $U=U(x_1,x_2)$,

de forma : $U = x_1^\alpha x_2^\beta$, unde x_1, x_2 sunt cantitățile din cele două bunuri luate în considerare.

Presupunem că $\alpha = 0,5$; $\beta = 0,5$.

a) Determinați curbele de indiferență, corespunzătoare valorilor $U=1$, $U=2$.

b) Determinați indicatorii marginali de elasticitate și de substituție și precizați natura substituibilităților în acest caz. Interpretați economic.

c) Formulați modelul matematic de maximizare a utilității, sub restricție bugetară, venitul consumatorului fiind V și prețurile celor două bunuri p_1 și p_2 . Scrieți condițiile necesare de optim și verificați condițiile de ordinul 2. Discuție după α și β .

Aplicație numerică $V=15$ milioane lei; $P_1=200.000$ lei; $p_2=500.000$ lei.

c) Verificați că punctul de optim găsit este punctul de tangență între una din curbele de indiferență (corespunzătoare utilității maxime, $U=U_{\max}$) și dreapta bugetului consumatorului: $p_1x_1+p_2x_2=V$.



Bibliografia

G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Suport de curs pentru ID-IFR, Editura Mustang, București, 2012
G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Matematici Economice, Editura Universitară, București, 2010
J. M. Mihăilă, Sinteza Matematica aplicata in economie, format digital, biblioteca electronica
J. M. Mihăilă, Complemente de matematică, Editura Universitară București, 2015
S. Dedu, F. Serban, Matematici Aplicate in Economie, Editura A, 2017
C. E. N. Gal-Chiș, Matematici economice, Editura Emanuel, 2015
T. Stihi, R. Vidican, Algebra liniara, Geometrie analitica si differentiala, Ecuatii diferentiale. Teoria campurilor, Editura Fair Partners, Bucuresti 2006

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 13

APLICATII ECONOMICO-FINANCIARE



Obiectivele lecției:

- Definirea noțiunii de ecuație diferențială
- Cunoașterea domeniilor ei de aplicabilitate
- Recunoașterea și studiul diferitelor tipuri de ecuații diferențiale
- Înțelegerea noțiunilor de soluție generală și particulară
- Abordarea și rezolvarea unor probleme economico-financiare



Conținutul lecției:

1. Ecuații diferențiale de ordinul I
2. Introducere
3. Exemple
4. Soluțiile ecuațiilor diferențiale
5. Aplicație în economie a Teoriei probabilităților, utilizând distribuția variabilelor aleatoare
6. Exemplu rezolvat
7. Temă propusă
8. Indicații și răspunsuri
9. Bibliografia (referințe)

Ecuații diferențiale de ordinul I

1. Introducere

Importanța teoriei ecuațiilor și sistemelor diferențiale rezidă în vasta aplicabilitate din domeniul tehnic (de exemplu în fizică, mecanică, în studiul circuitelor electrice, al oscilațiilor și al teoriei comenzii automate), din domeniul economic (studiul dinamicii cererii și ofertei în economia de piață), al celorlalte științe: chimie, biologie, și chiar în domeniul social (demografie) etc.

Definiția 1.

Se numește ecuație diferențială o relație între o variabilă independentă x , funcția căutată

$$y = y(x) \text{ și derivatele sale } y', y'', \dots, y^{(n)}, \text{ de forma } F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Dacă funcția căutată $y = y(x)$ este o funcție de o singură variabilă x , ecuația diferențială se numește ordinară.



Exemple

1. Modelarea dinamică a cererii și ofertei în economia de piață într-un scenariu ideal, adică al unei economii echilibrate în care se consideră că în fiecare moment piața determină prețul produsului astfel încât cererea absoarbe exact cantitatea oferită (nici un producător nu rămâne cu producția nevândută și niciun consumator nu este lăsat cu cererea nesatisfăcută):

$$C(t) = O(t), \quad (1)$$

cu condiția cunoașterii prețului inițial al produsului.

Modelul matematic se compune din:

- prețul produsului la momentul t , $p(t)$ ce reprezintă funcția necunoscută
- cererea ce depinde liniar de preț $C(t) = a + b p(t)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$
- oferta ce depinde liniar de prețul mediu $O(t) = a_1 + b_1 p_m(t)$, $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$.

Prețul mediu depinde de prețul produsului în perioada anterioară (întrucât producția și în consecință apariția pe piață sunt anterioare cererii):

$p_m(t) = p(t) + c p'(t)$, unde c este o constantă, iar $p'(t)$ reprezintă viteza de variație a prețului pentru un anumit moment de timp t .

Rezultă că oferta este $O(t) = a_1 + b_1 (p(t) + c p'(t))$.

Astfel, ecuația (1) devine $a + b p(t) = a_1 + b_1 (p(t) + c p'(t))$.

2. Modelul Verhulst¹⁶ (creșterii limitate) pentru studiul creșterii venitului național.

3. Model pentru studiul eficacității reclamelor.

4. Model dinamic de creștere economică.

5. Modelul lui Malthus¹⁷ (creșterii nelimitate) pentru studiul dinamicii populației.

6. Ecuația unui model demografic dinamic.

¹⁶ Pierre François, matematician și biolog belgian (1804-1849)

¹⁷ Thomas Robert, teoretician economic englez (1766 - 1834)

Observație

Existența și unicitatea acestor modele dinamice este dată de rezultatele teoremelor Teoriei ecuațiilor diferențiale.

Definiția 2

Se numește ordinul ecuației diferențiale, cel mai mare dintre ordinele derivatei care apare în ecuație.

3. Soluțiile ecuațiilor diferențiale

Definiția 3

Se numește soluție a unei ecuații diferențiale de ordin n pe un interval (a, b) o funcție $y = \varphi(x)$ definită pe acest interval cu derivatele sale până la ordinal n și pentru care substituind $y = \varphi(x)$ în ecuația diferențială, aceasta devine o identitate în raport cu x din (a, b) .

Definiția 4

Se numește soluție particulară a unei ecuații diferențiale, o soluție obținută din soluția generală $\varphi(x, c)$ pentru o valoare oarecare determinată a constantei arbitrare c .

Aplicatie in economie a Teoriei probabilitatilor, utilizand distributia variabilelor aleatoare

Exemplu rezolvat

1. i) Cererea unui produs pe piață este dependentă de prețul produsului în proporție de 40% și de saturația pieței în proporție de 30%.
Notând cu X și Y variabilele aleatoare de a refuza sau accepta oferta unei firme din motive de preț (x), respectiv de saturație (Y) și notând cu “0” refuzul și “1” acceptarea, să se scrie tabloul distribuției vectorului (X, Y) , considerând că celelalte 2 variabile sunt independente.

Care este probabilitatea de acceptare a ofertei?

Care sunt distribuțiile marginale?

ii) Dar dacă se consideră că decizia consumatorului este funcție atât de preț cât și de stocul deținut din bunul respectiv (deci cele două variabile sunt dependente), care este distribuția vectorului (X, Y) , știind că în aceleași condiții de la i), probabilitatea de acceptare pe piața respectivă este 55%?

Soluție.

Y X	0	1	P(X=x _i)
0	0,12	0,28	0,4
1	0,18	0,42	0,6
P(Y=y _j)	0,3	0,7	1

Y X	0	1	P(x _i)
0	0,25	0,15	0,4
1	0,05	0,55	0,6
P(y _j)	0,3	0,7	1

În ambele cazuri distribuțiile marginale sunt:

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \quad Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

care se completează din tabel.

În cazul

i) X și Y sunt independente $\Rightarrow p_{ij} = p_i q_j \quad \forall i, j$

ii) nu se mai poate scrie relația de independență $p_{ij} = p_i q_j \quad \forall i, j$, dar cunoscând probabilitatea de acceptare $p_{22}=0,55$ se obțin sistemele de ecuații:

$$\begin{cases} p_{11} + p_{12} = 0,4 \\ p_{11} + p_{21} = 0,3 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} p_{21} + p_{22} = 0,6 \\ p_{12} + p_{22} = 0,7 \end{cases}$$

adică, sumele pe linii și coloane în tabloul vectorului (X,Y) din distribuțiile marginale se obțin p_{aj} .

Tema

2. Din ofertele unei firme, 10% din produse sunt refuzate din motive de calitate si 20% din motive de saturație a pieței respective.
Considerând că cele două variabile aleatoare X si Y sunt independente, să se scrie tabloul de repartiției al variabilei (X, Y) și să se precizeze probabilitatea de acceptare a ofertei.



Bibliografia

1. G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Suport de curs pentru ID-IFR, Editura Mustang, București, 2012
2. G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Matematici Economice, Editura Universitară, București, 2010
3. J. M. Mihăilă, Complemente de matematică, Editura Universitară București, 2015
4. G. Ghic, J. M. Mihăilă, Probabilități și statistică matematică, Editura Universitara, București 2012
5. J. M. Mihăilă, Sinteza Matematica aplicata in economie, format digital, biblioteca electronica
6. J. M. Mihăilă, Bazele tehnologiei informației, Editura Universitară București, 2019

UNITATEA DE ÎNVĂȚARE 14

SOFTWARE SPECIALIZAT PENTRU APLICAȚII ECONOMICO-FINANCIARE



Obiectivele lecției:

- Definirea noțiunilor și conceptelor fundamentale
- Cunoașterea și înțelegerea principalelor funcții Excel
- Utilizarea aplicației de calcul tabelar



Conținutul lecției:

1. Introducere în programul de calcul tabelar Excel
2. Noțiuni și concepte fundamentale
3. Introducere
4. Operațiile de bază
5. Referințele celulelor
6. Formule de calcul Excel
7. Operatori de calcul
8. Exemple de funcții
9. Aplicații propuse
10. Bibliografia

INTRODUCERE ÎN PROGRAMUL DE CALCUL TABELAR EXCEL

Noțiuni și concepte fundamentale

Introducere

Microsoft Excel este un program de calcul tabelar („spreadsheet”) și reprezintă un tip special de software, folosit pentru organizarea și analiza datelor afișate sub forma unor tabele de dimensiuni mari.

Programele de calcul tabelar au fost create ca simulări computerizate ale foilor de lucru din contabilitate, unde datele erau scrise pe hârtie.

Programul Microsoft Excel, parte a pachetului Microsoft Office, este o aplicație de tip spreadsheet creată de firma Microsoft pentru sistemele de operare Windows și Mac OS X.

Programul Excel dispune de instrumente avansate pentru efectuarea de calcule și pentru realizarea de grafice sau de tabele pivot, precum și de alte caracteristici necesare prelucrării eficiente a unor cantități mari de date.

La lansare, programul va crea și va deschide un fișier nou (“workbook”), care conține implicit trei pagini de lucru (“worksheets”).

Salvarea și deschiderea fișierelor

Este recomandabil să se salveze frecvent fișierul în lucru pentru a nu pierde accidental date.

Operațiile de bază - selectarea, copierea, mutarea și ștergerea datelor

Pentru a copia sau a muta date pe o foaie de calcul sau într-o altă pagină, în primul rând trebuie selectate folosind mouse-ul - apăsând butonul din stânga, iar apoi se trage cursorul mouseului peste zona în care se afla celulele dorite, creând astfel un domeniu dreptunghiular de selecție.

Culoarea celulelor selectate se va schimba, de obicei devenind albastre. În acest fel, un întreg grup de celule va fi selectat.

De asemenea, se poate selecta un domeniu de celule folosind tasta Shift - click pe o celulă, apoi Shift-click pe o altă celulă. Astfel, zona dreptunghiulară care are aceste două celule drept colțuri opuse va fi selectată.

Pentru copierea datelor din celulele domeniului anterior selectat se folosește comanda “Copy”, iar pentru mutarea lor, comanda “Cut”.

Astfel datele vor fi copiate în memoria clipboard, de unde vor fi extrase în vederea reutilizării lor.

Pentru a încheia operația de copiere sau mutare a datelor, se folosește comanda “Paste” utilizată în prima celulă a noului domeniu sau în selecția întreagului domeniu.

Selectarea comenzilor “Copy”, “Cut” și “Paste” se poate realiza și direct din meniul “Home” sau din meniul contextual (disponibil la click-dreapta pe zona selectată).

O altă posibilitate este de a folosi comenzile rapide din taste, folosind scurtăturile consacrate: “Ctrl+C” pentru “Copy”, “Ctrl+X” pentru “Cut” și “Ctrl+V” pentru “Paste”.

O altă posibilitate de realizare a copierii/mutării datelor este de a culisa (trage) datele selectate într-o altă zonă, poziționând cursorul mouse-ului cu butonul stâng apăsător, pe marginea domeniului de selecție și trăgând datele în zona dorită.

Referințele celulelor

Tip referință	Exemplu	Modificarea la extindere
Absolută	\$A\$1 (coloană și linie absolute)	\$A\$1 (nu se modifică)
Mixtă	A\$1 (coloană relativă și linie absolută)	B\$1 (se incrementează coloana)
	\$A1 (coloană absolută și linie relativă)	\$A2 (se incrementează linia)
Relativă	A1 (coloană și rând relativ)	B2 (se incrementează)

Formule de calcul Excel

În Excel, o formulă începe întotdeauna cu semnul egal (=). Excel interpretează caracterele care urmează semnului egal ca o formulă.

Formula Excel este formată din una sau mai multe din următoarele elemente: operanzi (elementele de calculat/prelucrat: date, constante și/sau referințele la celule), operatori, referințe și/sau funcții.

Utilizarea constantelor în formule Excel

O constantă este o valoare care nu se calculează, ci este invariantă la operația de extindere a formulei.

O expresie sau o valoare rezultată dintr-o expresie nu este o constantă.

Dacă se utilizează constante într-o formulă în loc de referințe la celule, rezultatul se modifică numai dacă se modifică și formula. În general, se recomandă amplasarea în celule individuale a constantelor, întrucât, la nevoie, se pot modifica cu ușurință.

Operatori de calcul

Operatorii specifică tipul de calcul efectuat asupra elementelor dintr-o formulă.

Excel utilizează operațiile matematice, simbolurile și constantele consacrate.

Tipuri de operatori

Există patru tipuri diferite de operatori de calcul:

1. aritmetici,
2. relaționari (de comparare),
3. de concatenare (unire, alipire) a textului
4. de referință
5. de atribuire

Operatori aritmetici

Pentru a efectua operații aritmetice de bază, cum sunt adunarea, scăderea, înmulțirea sau împărțirea, ridicarea la putere se folosesc următorii operatori aritmetici.

Operator aritmetic	Operație aritmetică
+	adunare
—	scădere
*	înmulțire
/	împărțire întreagă
%	procent
	împărțire cu rest
^	ridicare la putere
**	

Operatori relaționali

Operatorii relaționali sau de comparare sunt utilizați pentru compararea a două valori. Rezultatul comparării este una din valorile logice TRUE sau FALSE.

Operator relaționar (de comparare)	Semnificație
=	egal
>	mai mare
<	mai mic
>=	mai mare sau egal
<=	mai mic sau egal
<>	diferit

Operator de concatenare (unire) text

Operatorul & (ampersand) concatenează unul sau mai multe șiruri de text pentru a realiza unul singur.

Operatori de referință

Operatorii de referință combină zone de celule pentru calcule cu următorii operatori.

Operator de referință	Rezultat
: (două puncte)	Definirea unui domeniu
. (punct)	Combinarea referințelor multiple într-una singură
(spațiu)	Realizarea unei referințe la celulele comune celor două referințe

Ordinea operațiilor și prioritatea operatorilor în formulele Excel

Formulele calculează valori într-o anumită ordine.

Excel calculează formula, conform ordinii operațiilor aritmetice.

Dacă formula conține operatori de același grad, Excel evaluează operatorii de la stânga la dreapta.

Utilizarea funcțiilor și a funcțiilor imbricate (compuse) în formule Excel

Funcțiile sunt formule predefinite care efectuează calcule utilizând valori, stocate în variabile, numite argumente, într-o anumită ordine sau structură.

Funcțiile pot fi utilizate pentru efectuarea unor calcule simple sau complexe.

Sintaxa funcțiilor Excel

1. Structură. Orice funcție începe cu semnul egal (=), urmat de numele funcției care are unul sau mai multe argumente separate printr-un separator predefinit (virgulă sau punct și virgulă), cuprinse într-o paranteză rotundă.

2. Numele funcției. Numele funcțiilor sunt cuvinte rezervate.

3. Argumente. Argumentele pot fi constante (numere sau valori text introduse direct într-o formulă), valori logice (TRUE sau FALSE), matrice, valori de eroare, referințe la celule, formule sau alte funcții.

4. Operatori

Tipurile funcțiilor Excel

La tastarea numelui funcției se afișează o **caseta de dialog** pentru definirea sintaxei și a argumentelor.

Funcțiile foii de lucru sunt clasificate după funcționalitatea lor.

- Funcții de compatibilitate
- Funcții cub
- Funcții de baze de date
- Funcții de dată și oră
- Funcții de inginerie
- Funcții financiare
- Funcții de informații
- Funcții logice
- Funcții de căutare și de referință
- Funcții matematice și trigonometrice
- Funcții statistice
- Funcții text
- Funcții web

Exemple de funcții

AVERAGE	PEARSON
AVERAGEIF	POISSON
DAY	PRODUCT
COVAR	PROPER
COVARIANCE.P	ROUNDDOWN
COVARIANCE.S	ROUND
AND	ROUNDUP
DAYS	ROW

AVERAGE	SQRT
AVERAGE A	STANDARDIZE
CORREL	SUM
COUNT	SUMIF
COUNTIF	STDEV
F.TEST	STDEV.P
DAYS360	STDEV.S
FALSE	STDEVA
FORECAST	STDEVP
FREQUENCY	STDEVPA
GAUSS	STEYX
GEOMEAN	SUBSTITUTE
IF	SUBTOTAL
MEDIAN	TEST
MIN	TIME
MAX	TODAY
RANK	TREND
MID	TRUE
MINIFS	TRUNC
NOT	UPPER
OR	YEAR

Aplicatii propuse

Pentru problemele abordate in curs, realizati abordare si calcul cu aplicatii computerizate de analiza a datelor (in cazurile unde identificati posibilitatea)



Bibliografia

G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Suport de curs pentru ID-IFR, Editura Mustang, București, 2012
G. Ghic G, J. M. Mihăilă, Matematici Economice, Editura Universitară, București, 2010
J. M. Mihăilă, Sinteza Matematica aplicata in economie, format digital, biblioteca electronica
J. M. Mihăilă, Complemente de matematică, Editura Universitară București, 2015
J. M. Mihăilă, Bazele tehnologiei informației, Editura Universitară București, 2019
S. Dedu, F. Serban, Matematici Aplicate in Economie, Editura A, 2017
C. E. N. Gal-Chiș, Matematici economice, Editura Emanuel, 2015